

TECHNISCH STUDENTEN-TIJDSCRIFT

HALFMAANDELIJKSCH TIJDSCRIFT,

ORGAAN VAN DE CENTRALE COMMISSIE VOOR STUDIEBELANGEN.

Hoofdredacteur: S. DE WAARD.

Redactie:

J. J. I. SPRENGER,
G. J. P. M. BOLSIUS,
G. EKAMA,
W. P. VAN ZON,
A. G. D. BRUINS,
S. DE WAARD,
J. F. VAN DIERMEN,

Civiele faculteit,
Bouwkundige faculteit,
Werktuigkundige faculteit,
Scheepsbouwkundige faculteit,
Electrotechnische faculteit,
Scheikundige faculteit,
Mijnbouwkundige faculteit,

Voorstraat 101.
Falkstraat 122, Den Haag.
Oude Delft 249.
Nieuwe Plantage 74.
Phoenixstraat 37.
Van Leeuwenhoeksingel 12.
Mijnbouwkundig Instituut.

Vlaamsche Sub-Redactie:

M. STEENBRUGGE,
M. VAN DER HAEGHEN,

Werktuigkunde,
Burgerlijke Bouwkunde,

St. Machariusstraat 1, Gent.
Coupure 155, Gent.

Luchtvaart: A. G. VON BAUMHAUER, Van Leeuwenhoeksingel 5.

en met welwillende medewerking van verscheidene Hoogleeraren aan de T. H.

Abonnementsprijs per jaar f 4,—.

Uitgave Technische Boekhandel en Drukkerij J. WALTMAN JR., Delft.

4e Jaargang. No. 14. Juni 1914.

Alle berichten en mededeelingen zijn buiten
verantwoordelijkheid van de Redactie.

Inhoud.

Behoedmiddelen tegen brand.
Scheepstrillingen, door P. L. van den Berg, *s. i.*
Over uitlevering van metselspecies en beton.
Het maken van bruggen met eenvoudige middelen.
Oppervlak Condensors.
Iets-over „Wanderwellen”.
Theoretisch en experimenteel onderzoek van vloeistof-
strooming.
Antwoord op Problema II.
Oplossingen van de wiskundige vraagstukken, prop.
examen. Mei 1914.
Examen-opgaven. — Propaedeutische- en Candidaats-
Examen-vraagstukken.
T. H. — Uitslag examens.
Boekbespreking.
Berichten en Mededeelingen.

MEDEDEELING.

De inzenders van artikelen in de jaar-
gangen 1, 2 en 3 kunnen de daarvoor ge-
bruikte clichés toegezonden krijgen, zoo zij
daartoe hun wensch te kennen geven aan
den Hoofdredacteur uiterlijk vóór 1 Juli 1914.

Behoedmiddelen tegen Brand.

In alle moderne groote steden verheffen zich
tegenwoordig ontzagwekkende magazijnen met
verscheidene uitgestrekte verdiepingen. De drukke
volkstoeloop op sommige dagen maakt, dat daarin
een aanzienlijk getal menschen zijn, buiten het leger
der beambten, en in geval van brand moeten daar, net
als in een schouwburgzaal, afschuwelijke panieken
ontstaan: het getal uitgangen is ongelukkigerwijze
te klein.

Meest alle dezer huizen zijn ingericht om spoedig
de kleinste brand te keer te komen, door het
aanbrengen van zekere toestellen, als brandspuiten
en dg. Doch wanneer zich daar speciaal geene

wachters voor bevinden, zullen er zich onder de voor het onheil vluchtende menigte maar weinig koelbloedige menschen voordoen, om die toestellen te hanteeren; trouwens wanneer ze zelfs nog aanwezig, versmolten als ze zijn in de massa, wordt meesttijds, wegens hun klein getal hun krachtig handelend optreden onmogelijk gemaakt door de onredeneerende vluchtelingen. Deze daarenboven komen dan ook alle uitgangen versperren, met hunne wilde samenschooling aan de te nauw, geworden deuren en vermoeilijken het werk der Stadsbrandweer, die nochtans spoedig aan den brand zou moeten geraken.

Andere behoedmiddelen moeten dus uitgedacht worden: de kunst om een brand te vermijden of tegen te houden is misschien wel hooger te plaatsen dan die om hem uit te dooven. In Frankrijk hebben ingenieurs, met den steun van Staatslieden en andere persoonlijkheden, een „Institut de la Prévention du feu” gesticht. Ze bestudeeren, op proefondervindelijke wijze, de middelen een brand tegen te te houden en zelfs onmogelijk te maken. Het is nogal ongelukkig het te moeten vaststellen, dat de bouwkundigen er weinig aan denken voorzorgen te nemen tegen dergelijk mogelijk onheil: als de voorgevel maar esthetisch is (natuurlijk naar de opvatting van den ontwerper), en de inwendige verdeeling goed overeenkomt met hetgeen de klanten geëischt hebben, is de studie teneinde voor het meerendeel.

Door het vuur komen wij in aanraking met een element, dat afhangt terzelfdertijd van de scheikunde de natuurkunde en de electriciteit: van daar de tusschenkomst der wetenschap, want om iets te bestrijden, met kans van welslagen, moet men dat goed kennen alsook zijne voortbrenging en flauwe deelen. Nemen wij b. v. de electriciteit, men beweert dat zij zonder gevaar is, en daarin is men totaal mis: de statistieken der moderne onheilen stellen dat vast. Zij zou zonder gevaar zijn indien zij op voortreffelijke wijze geplaatst werd, en niet op die belachelijke manier, in brandbare houten betimmeringen, die door de vochtigheid, juist de kortsluiting veroorzaken, welke zij zouden moeten beletten.

Te Parijs is sinds 1906 een politie-reglement in zwang voor den bouw der groote magazijnen met voorschriften nopens brandgeval. Deze zijn meesttijds opgetrokken in ijzer; de konstruktieve elementen van dit geraamte zullen zich uitzetten

bij de minste warmte verhooging, zich verwringen (wie herinnerd zich niet de verwrongen ijzermassa der Brusselsche Tentoonstelling in 1910) en tenslotte de steunmuren in hunnen val meerukken: gips en hout, alhoewel min weerstand biedend aan het vuur zullen toch hun onheil stichten. De midden hall van het magazijn is gewoonlijk met glas besloten: in brandgeval, door de geweldige gasdrukking en de hooge temperatuur, springen de ruiten onvermijdelijk de lucht in, alzoo het vuur opwakkerend door de toelating van versche zuurstof. De magazijnen moeten nu voortaan geheel en al gesloten zijn voor de daarrondom liggende gebouwen door muren of schutsels in metselwerk. De deuren evenals de vloeringen, zijn in brandweerstand biedende materialen uitgevoerd. Deze laatste zijn gewoonlijk vervaardigd in baksteen (holle of niet) en ijzer, inplaats van gewapend beton. Maar onbrandbaarheid is niet voorzorg tegen brand: en in dit opzicht is een houten bepleisterde zoldering beter dan een ijzeren vloering met baksteen tusschenwerk. De trappen en bordessen moeten in brandvrije stoffen vervaardigd zijn, zonderevenwel opengewerkt te zijn. Zij mogen nochtans in hout gemaakt zijn, maar moeten alsdan met gips beraapt worden. Hetzelfde voor de daken en om den loop der vlammen te stuiten ware het misschien niet slecht het magazijn te verdeelen door „brandmuren” die zich een 25 cM. buiten het dak zouden verheffen.

De trappen zijn bijna altijd in het midden van den hall geplaatst; in geval van paniek brengen ze dus, in een enkel punt een massa volk samen, die allen uitgang zou stremmen. De trappen zouden talrijker moeten zijn, onafhankelijk van het gebouw, desnoods uitkomen op galerijen buiten het gebouw, en aangeduid door witte platen met rood opschrift.

De deuren moeten in ieder verdiep, tot het strikt noodige beperkt worden en zoodanig geschikt zijn, dat zij zich niet leenen tot den doortocht van den rook en de gassen. De lift-kokers, echte schouwen, spelen ook nog eene groote rol in de uitbreiding van een brand: men zou aan de handelshuizen moeten voorschrijven een automatisch sluiting-systeem te vinden, dat zoodra een brand oplaait, alle tocht afperst.

Buiten al die voorschriften, hier in groote lijnen algemeen aangeteekend, zijn nog vele wenschelijke dingen te verwezenlijken. Zoo zou men het personeel

van het huis kunnen gewoon maken aan een nood-uitgang, door enkele oefeningen. Al de beampten, en vnl. de mannen, zouden de hanteering der brandtoestellen moeten kennen. Een bijzonder alarm-sein b.v. zou hen van het onheil verwittigen, zonder dat het publiek iets vermoedde, en dit zou hen toelaten de lieden af te leiden naar de verschillende nood-trappen, zoodoende eene paniek vermijdende. Het is ook wenschelijk meer dan ééne straatdeur te hebben, om het gemak van het uitloopen.

De rol der bouwkundigen is dus goed den weerstand te kennen aan den brand der bouwmaterialen, de gevaren der verwarming- en verlichtingtoestellen, en voornamelijk de algemeene begrippen der verzekeringsinrichting en der rationeele ontruiming en redding, begrippen die in de samenstelling van ieder publiek gebouw moeten overwegend zijn.

MARCEL VAN DER HAEGHEN.

Scheepstrillingen.

Een aan één einde ingeklemde staaf door een uitwendige kracht P , aan het andere einde aangrijpend, uit haar evenwichtsstand gebracht, zal gaan trillen om dien evenwichtsstand.

De trillingstijd is

$$T = \pi \sqrt{\frac{P L^3}{3 E I g}}$$

Deze formule gaat ook op, wanneer in plaats van de uitwendige kracht P de zwaartekracht optreedt, aangrijpende in het zwaartepunt van de staaf. De trillingstijd aldus verkregen, behoort bij de staaf, het trillingsgetal wordt natuurlijk trillings-

getal, de trillingen vrije trillingen of traagheids-trillingen genoemd.

Krachttrillingen of gedwongen trillingen worden veroorzaakt door een op den romp werkende periodieke kracht of moment. De periode van trilling is dan precies gelijk aan de periode van de kracht of het moment. Groote amplituden treden op als de op den romp werkende kracht wisselt overeenkomstig den natuurlijke trillingstijd van het schip. De scheepstrillingen zijn dan zeer hinderlijk; het verschijnsel heet synchronisme.

Een periodieke kracht driemaal haar positief maximum bereikend tijdens den duur van twee vrije trillingen van het schip, of éénmaal gedurende twee, drie of vier vrije scheepstrillingen, zal lang niet in die mate als bij zuivere overeenkomst aanleiding geven tot het optreden van groote amplituden, veel minder dan men zou verwachten. Dit bewijst figuur 1, waar de trillingsverschijnselen van de Deutsche torpedoboot S 42 in beeld zijn gebracht. Alleen bij ongeveer 230 omwentelingen van de machine is sprake van zeer hinderlijk synchronisme.

Een schip is over het algemeen zoo stijf, dat inwendige krachten sterk remmend werken op de trillingsuitslagen.

Men onderscheidt:

a. Transversale trillingen, te splitsen in horizontale en verticale. De verticale trillingen maken het verblijf op menig schip onaangenaam, ze komen het meest voor.

b. Torsietrillingen, die waarschijnlijk alleen hinderlijk optreden in het achterschip van snelle turbinestoomers, en daar voorkomen als trillingen van 1500 à 3000 per minuut. Een scheepsromp is te stijf tegen wringing dan dat een niet zeer

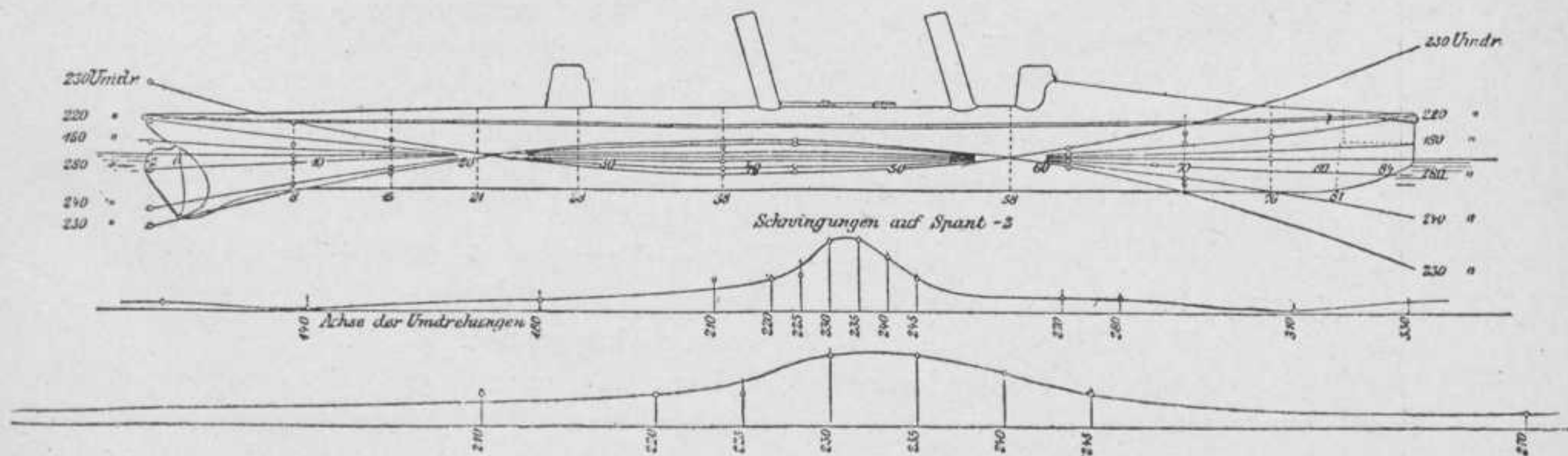


Fig. 1.

mee wisselende kracht merkbare torsietrillingen zou kunnen opwekken.

c. Longitudinale trillingen kunnen buiten beschouwing blijven.

Vooraf de verticale trillingen vragen onze aandacht. De Duitsche ingenieurs Schlick en Kleen hebben formules gepubliceerd, die het getal vrije verticale trillingen van schepen geven.

De formule van Schlick in Johow bl. 653 geeft goede resultaten voor zeeschepen, die van Kleen te vinden in Z. d. V. d. I. 1893 bl. 1487 is aan te bevelen voor rivierschepen.

Proeven zijn genomen door Schlick met dunne staven, door den Amerikaan Mallock met dunne staven en een scheepsvormige staaf, en door Yarrow met een torpedoboot, waarin de ont-koppelde machines draaiden. De chef-constructeur der Amerikaansche marine Melville concludeert uit de publicaties van bovengenoemde heeren, dat een schip de volgende transversale vrije trillings-verschijnselen kan vertoonen: er treden op 2, 3, 4, 5, 6 enz. knopen, met trillingsgetallen, behoorende bij dit aantal knopen, die zich verhouden vrijwel als 1:2:4:6;8 enz. Of het juist is, is de vraag.

De trillingen van een schip zijn vaak ingewikkeld. Verschillende trillingen treden gelijktijdig op, terwijl de amplituden soms periodiek afnemen en aangroeien. Een pallogram vertoont dan eigenaardige interferenties. Fig. 2 vertoont samengestelde trillingen van verschillende frequentie.

Scheepstrillingen ontstaan door de werking van machines en schroeven.

Bij een eenkrukzuigermachine, waarvan de krukstraal gelijk is aan een vierde deel van de drijfstanglengte, ontstaat een verticale traagheidskracht:

$$I_p = m r \omega^2 (\cos \theta + 0,2540 \cos 2 \theta - 0,0041 \cos 4 \theta + 0,00007 \cos 6 \theta + \text{enz.})$$

in welke formule m is de massa van de heen en weer gaande deelen, r de krukstraal, ω de hoeksnelheid, en θ de hoek door de kruk gemaakt met haar hoogsten stand.

Ook ontstaat een middelpuntsvliedende kracht.

$$I_m = \text{constante} \times z \times P \times N^2$$

waarin P het gewicht van de draaiende deelen N het aantal omwentelingen per minuut en z de afstand van het zwaartepunt van de draaiende deelen tot hart as, is.

In verticale richting werkt dus op den scheepsromp ($I_p + I_m \cos \theta$) en horizontaal $I_m \sin \theta$.

Bij machines met meer krukken stelt men deze krachten samen tot een resultante, evengoed als de momenten der krachten t.o.v. zeker punt één resulterend moment vormen. Schlick kent alleen belang toe aan den eersten term van de verticale traagheidskracht I_p .

De Fransche ingenieur Lelong beschouwt, zooals in de Fransche marine gebruikelijk is, den term met $\cos \theta$ en die met $\cos 2 \theta$. Hij rekent dus op het optreden van één kracht, die gedurende een omwenteling, eenmaal van maximum minimum en weer maximum wordt, en een tweede kracht van dubbele frequentie, die tweemaal wisselt gedurende één omwenteling. Melville, die vaak wisselende krachten, die het schip wel doen trillen, in hooge mate verderfelijck acht, verdiept zich ook in de krachten en momenten van hoogere frequentie. De horizontale krachten en hare momenten zijn van enkele frequentie.

Zeer begrijpelijk is dat deze traagheidskrachten, door de machine opgewekt, en hunne momenten een schip in trilling brengen.

In hoe sterke mate dit geschiedt, hangt behalve van hare absolute grootten, af van de stijfheid van de machine-fundatie, en de plaats van de machine in het schip.

Lelong legt sterk den nadruk op het groote belang van een stijve machine-fundatie; hij vertelt dat van twee zusterschepen van de Fransche marine, een ter plaatse van de machinekamers een langsschot had, het andere niet. Het laatste nu vibreerde; het eerste, waar de machines zoo innig met den romp waren verbonden, in het geheel niet.

De plaats van de machine is ook van grooten invloed. Wekt een machine een belangrijke verticale traagheidskracht op, die als vrije kracht op den scheepsromp werkt, dan zal de kracht des te meer onaangenaam zijn, naarmate de machine meer tusschen twee knopen in het trillende schip is geplaatst.

Omgekeerd is de uitwerking van een moment juist het grootst, indien de machine ter plaatse van een knoop staat.

Door een onregelmatig draaimoment, door de machine van de as geleverd, ontstaan periodieke stooten tegen het kraagblok, werkend aan een hefboom, die gelijk is aan den afstand van hart

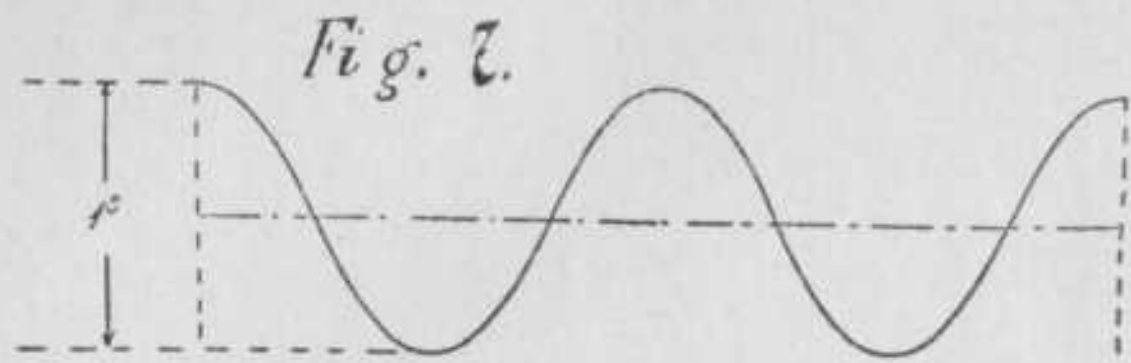


Fig. 7.

$$s = 1 \text{ Zoll}$$

$$n = 100 \text{ pro Minute}$$

$$\frac{E}{M} = 0,142$$

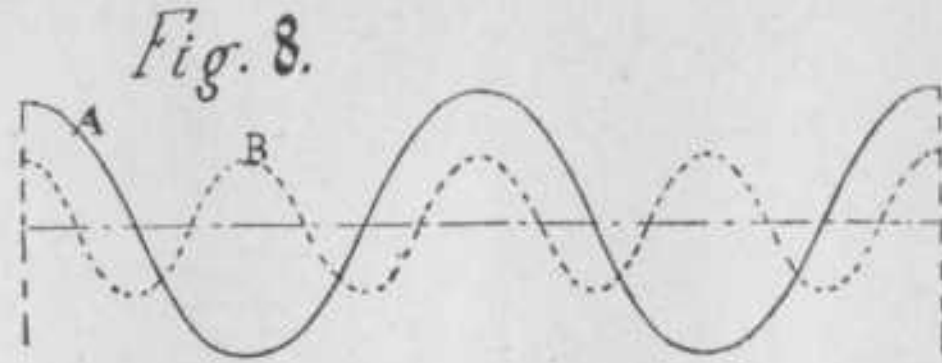


Fig. 8.

I Ordnung.	II. Ordnung.
$s = 1$	0,5
$n = 100$	200
$\frac{E}{M} = 0,142$	0,284
A=I. Ordnung	B=II. Ordnung.

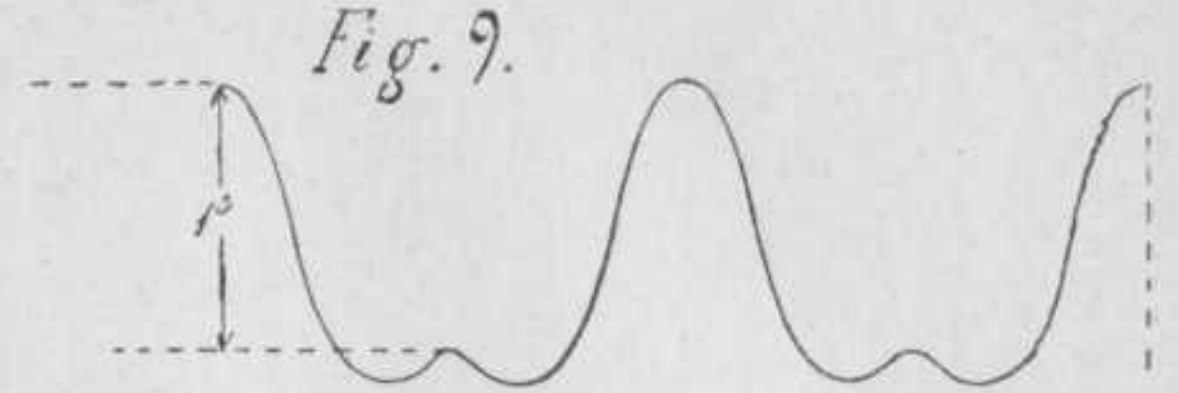


Fig. 9.

I. Ordnung.	II. Ordnung
$s = 1$	0,5
$n = 100$	200
$\frac{E}{M} = 0,142$	0,284
Kraft x Frequenz 1 zu 4.	

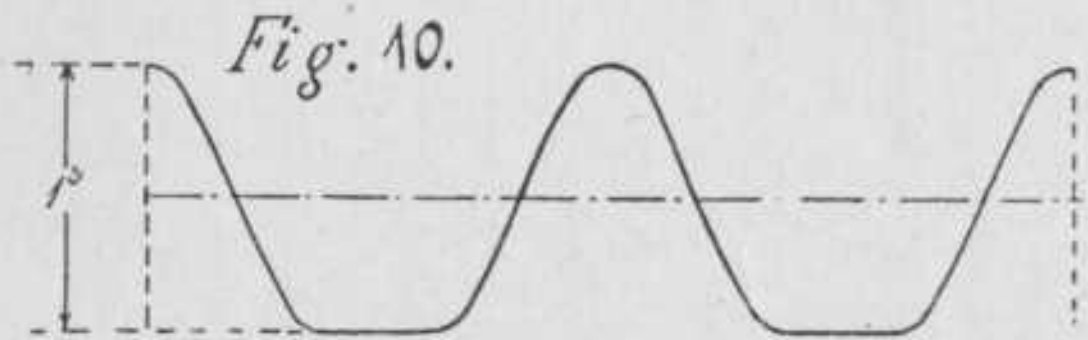


Fig. 10.

Ordnung I	II
$s = 1$	0,25
$n = 100$	200
$\frac{E}{M} = 0,142$	0,142
Kraft x Frequenz 1 zu 2	

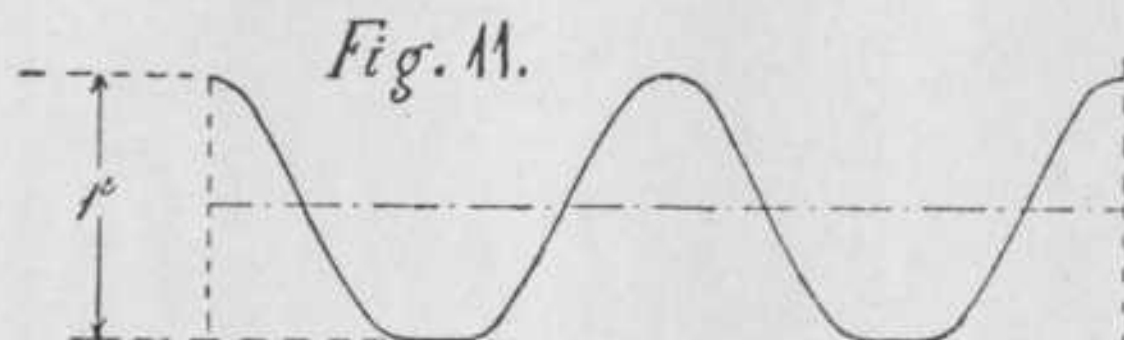


Fig. 11.

Ordnung I	II
$s = 1$	0,125
$n = 100$	200
$\frac{E}{M} = 0,142$	0,071
Kraft x Frequenz 1 zu 1.	

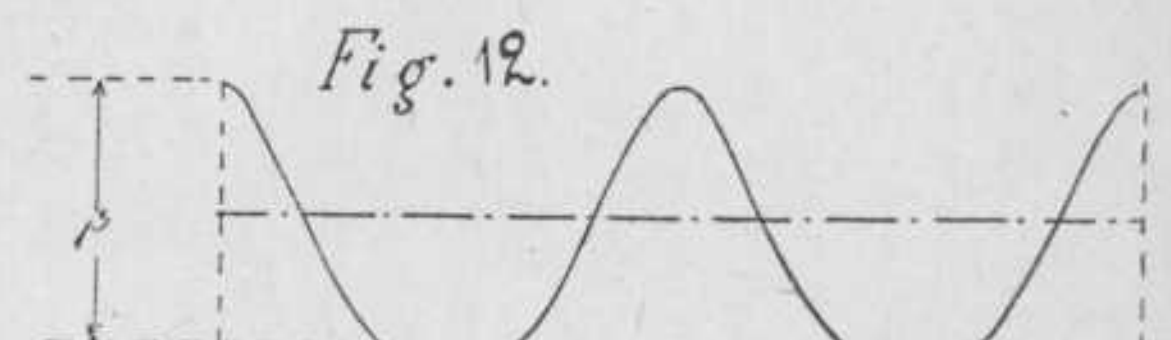


Fig. 12.

Ordnung I.	II.	IV.
$s = 1$	0,25	0,0625
$n = 100$	200	400
$\frac{E}{M} = 0,142$	0,142	0,142
Kraft x 1 zu 2 2 zu 4		
Frequenz		

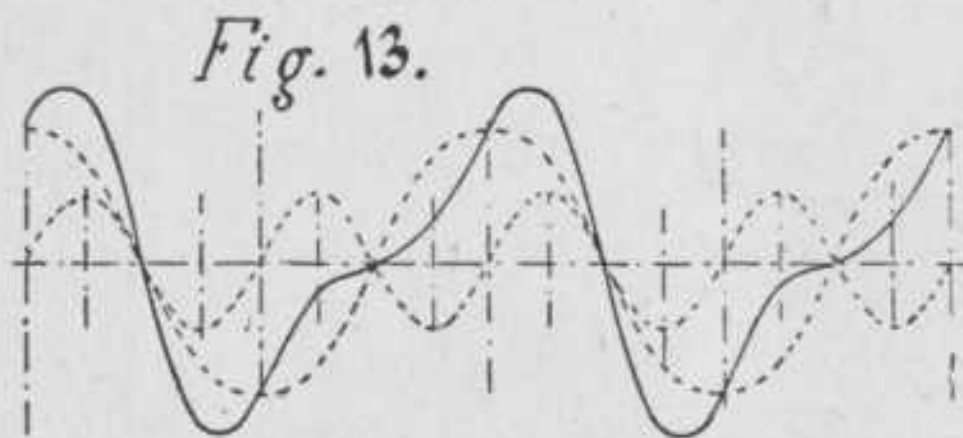


Fig. 13.

Ordnung I	II
$s = 1$	0,5
$n = 100$	200
$\frac{E}{M} = 0,142$	0,284
Kraft x Frequenz 1 zu 4	

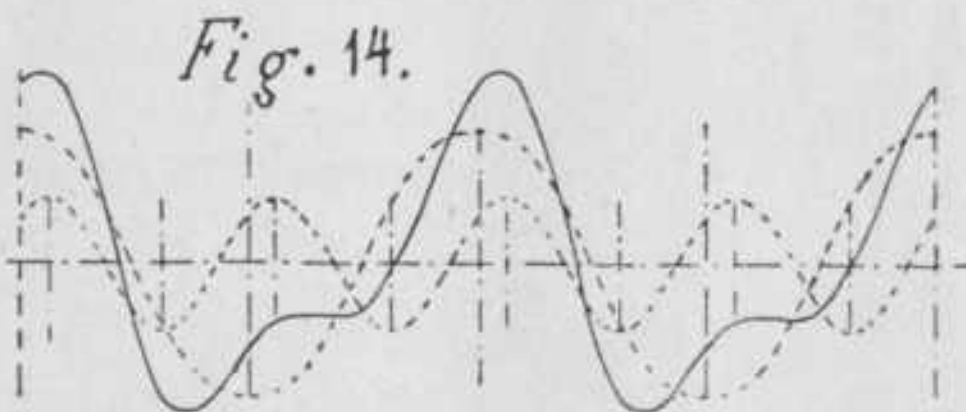


Fig. 14.

Ordnung I	II
$s = 1$	0,5
$n = 100$	200
$\frac{E}{M} = 0,142$	0,284
Kraft x Frequenz 1 zu 4	

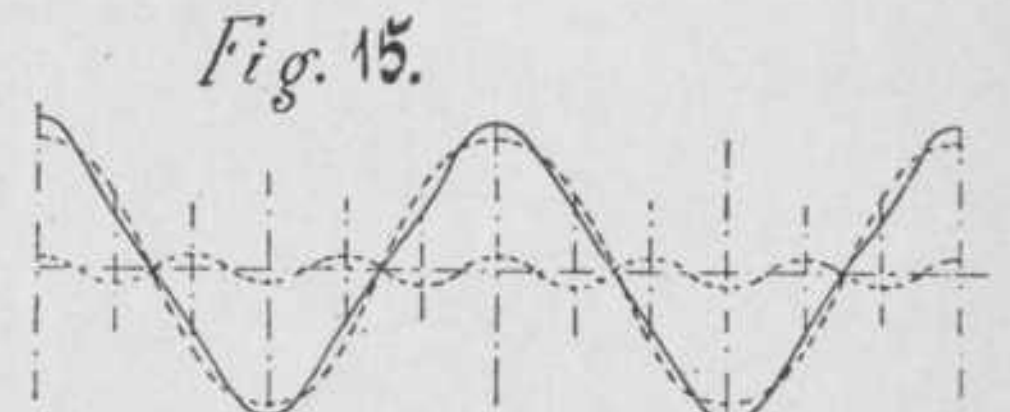


Fig. 15.

Ordnung I	III
$s = 1$	0,111
$n = 100$	300
$\frac{E}{M} = 0,142$	0,142
Kraft x Frequenz 1 zu 3	

as tot de neutrale laag van het schip. Dit moment veroorzaakt aldus verticale trillingen, des te meer naarmate het kraagblok dicht bij een knoop staat. Figuur 3 verduidelijkt dit.

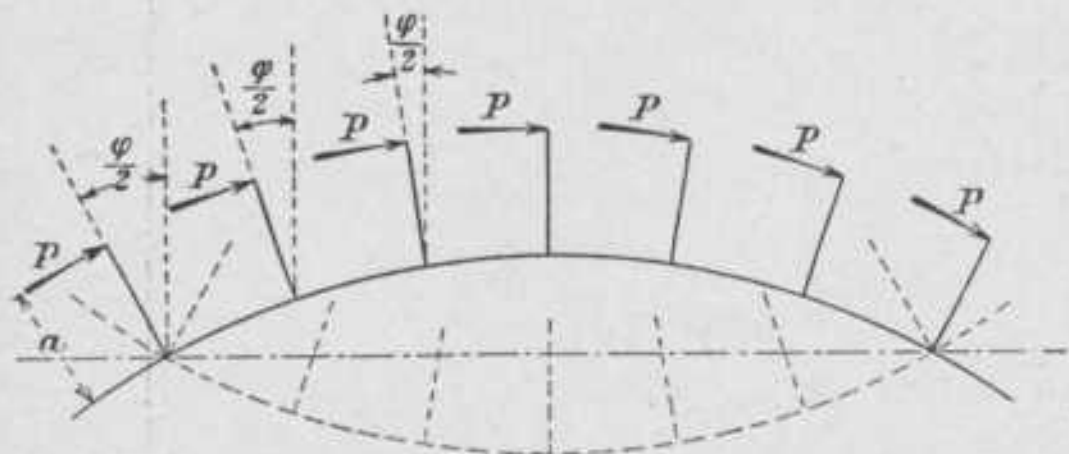


Fig. 3.

Lelong vertelt, dat bij de Fransche marine de machines zoodanig geconstrueerd worden, dat de resulterende traagheidskrachten van enkele en dubbele frequentie, nul worden. Zooveel mogelijk wordt nog verminderd het moment van dubbele frequentie, zoodat men ten slotte alleen overhoudt een moment, dat eens per omwenteling wisselt. Door de machines midscheepsch te plaatsen, zorgt

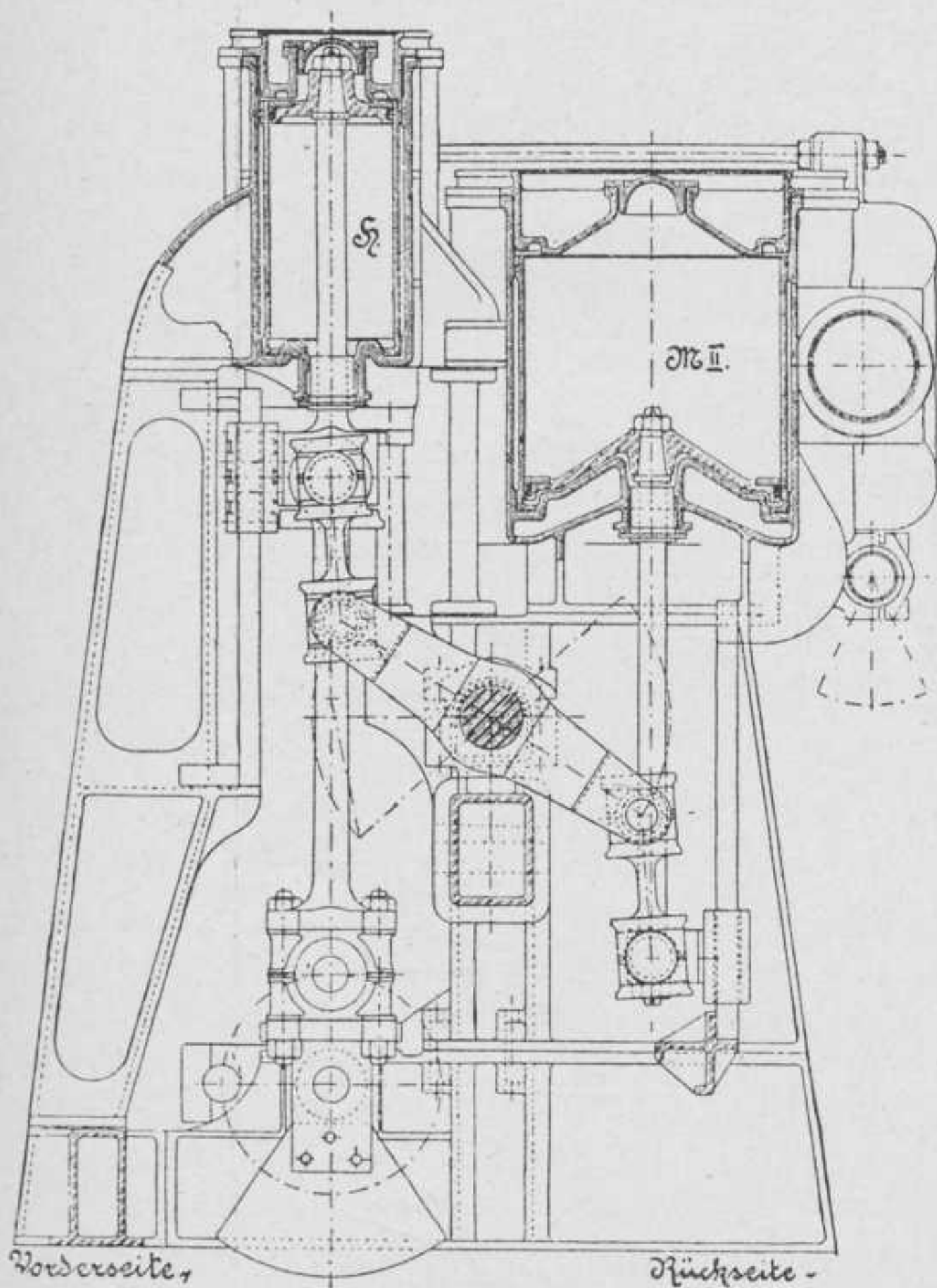


Fig. 4. Machine van Macalpine.

men dat dit moment geen trillingen veroorzaakt. De krukken van vierkruksmachines houdt men onder 90° .

Door het aanbrengen van tegenwichten worden de centrifugaalkrachten verminderd, dus de horizontale, en gedeeltelijk de verticale krachten. Door horizontaal overbalanceeren, kan men de verticale krachten nog meer verminderen.

Melville, de vijand van traagheidskrachten van meervoudige frequentie, beveelt een machine van Macalpine zeer aan. Deze machine, voorgesteld in fig. 4, is nagenoeg volkomen uitgebalanceerd; als één zuiger naar boven wordt versneld, voert een andere de overeenkomstige beweging naar beneden uit. Melville is een heftig bestrijder van Schlick, en toont berekeningen, die bewijzen, dat Schlick weliswaar de krachten en momenten van enkele frequentie nul maakt, maar dat in machines, volgens Schlick uitgebalanceerd, soms sneller wisselende krachten en momenten ontstaan, die belangrijk grooter zijn, dan die van normaal uitgevoerde machines van gelijk vermogen. Vergelijkt een onpartijdig beoordeelaar evenwel pallogrammen van zusterschepen, waarvan een machines volgens Schlick heeft, en het andere niet, dan komt hij allicht tot waardeering van het systeem van Schlick, al is dit zeker niet het eenige goede.

Ook kunnen trillingen veroorzaakt worden door werking der schroeven, en wel door stooten op het kraagblok, als de schroef het wringmoment, dat de as overbrengt niet gelijkmatig opneemt, maar hoofdzakelijk door drukken op den schroefstevan of de asstoelen.

Als een schroef niet goed uitgebalanceerd is, zal bij het draaien een centrifugaalkracht ontstaan, die den steven drukkend, het schip doet trillen horizontaal en verticaal. Één trilling per omwenteling ontstaat; de trillingen zijn van enkele frequentie.

Als van een schroef één blad iets meer spoed heeft dan de andere bladen, zal dit blad meer weerstand ondervinden en de as tegen den steven drukken. Verticale en horizontale trillingen van enkele frequentie zijn het gevolg. De snelstoomer „Deutschland”, met machines uitgebalanceerd volgens Schlick, vibreerde sterk, en de trillingen waren van enkele frequentie. De machines konden die niet veroorzaken, en Schlick vond dat een schroefblad iets meer spoed had, dan de andere bladen van dezelfde schroef; nadat dit euvel was weggenomen, werd geen last meer ondervonden.

Als het water de schroef toevloeft in een richting, die een hoek maakt met de asrichting, zal daarvoor een blad, wanneer het gedurende een deel van de omwenteling het water klieft tegen de bewegings-richting van het water in, een grooteren weerstand ondervinden.

De krachten op steven of stoelen bereiken een maximum een even groot aantal malen per omwenteling, als het aantal bladen van de schroef bedraagt. Trillingen van meervoudige frequentie worden dus opgewekt. Dit is ook het geval wanneer een blad, dicht langs de huid gaande, of achter een asstoel passeerende, gedurende een oogenblik in andere omstandigheden verkeert als de overige bladen. Fig. 5 verduidelijkt boven genoemde gevallen.

Bij schepen met meerdere schroeven ontstaan complicaties, doordat b.v. de buitenste schroeven gelijktijdig een gelijkgerichte kracht op de stoel uitoefenen. Dan ontstaan dus versterkte horizontale en verticale trillingen. Dit komt voor bij turbineschepen, die trillen met een zeer hoog trillingsgetal, waarbij meerdere knopen ontstaan; naar voor werden de amplituden steeds kleiner, en het voorste deel van het schip is rustig.

Werken de krachten der beide wingschroeven

in tegengestelde richting, dan kunnen torsietrillingen ontstaan.

Het water, door de schroeven achterwaarts versneld, kan de romp treffend, aanleiding geven tot trillen, merkbaar alleen bij zeer lichte vaartuigjes.

Als de schroeven een schip doen trillen, vindt men vaak veel verbetering door een nieuwe schroef te nemen, met een ander aantal bladen. De „Château Renault”, een Fransch oorlogschip trilde niet meer, nadat de driebladige schroeven door vierbladige waren vervangen.

Bij bestudeeren van sloopstrillingen is de pallograaf van Schlick van grooten dienst; deze teekent de trillingen op. Nauwkeurig de pallogrammen beziende, spoort men de oorzaak der trillingen op en kan middelen tot verbetering beramen.

Bij het ontwerpen van een schip is het zaak het ontstaan van hinderlijke trillingen te vermijden.

Op de volgende dingen moet men letten:

Eerstens moet men synchronisme vermijden. Men berekent volgens Schlick of Kleen het aantal vrije trillingen, en laat de machine een aantal toeren maken in een niet eenvoudige verhouding staande tot het critisch aantal omwentelingen, b.v. 15 tot 20% minder, of 35% meer.

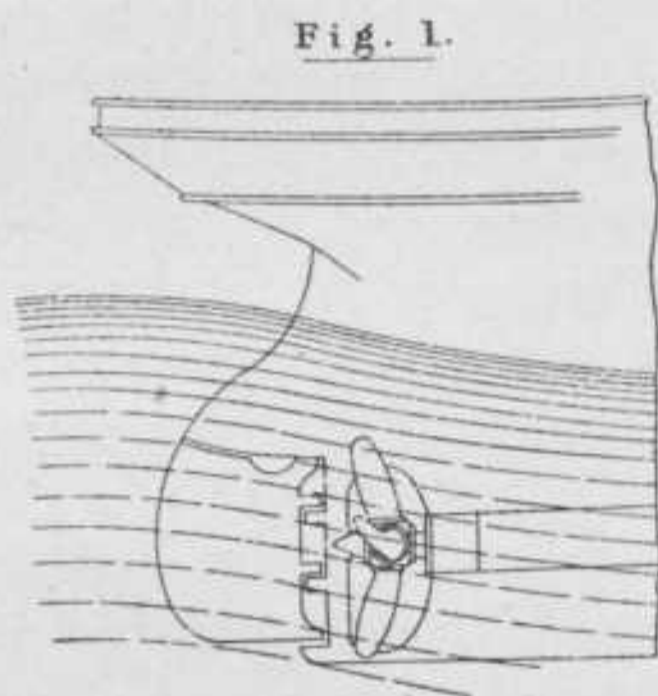


Fig. 1.

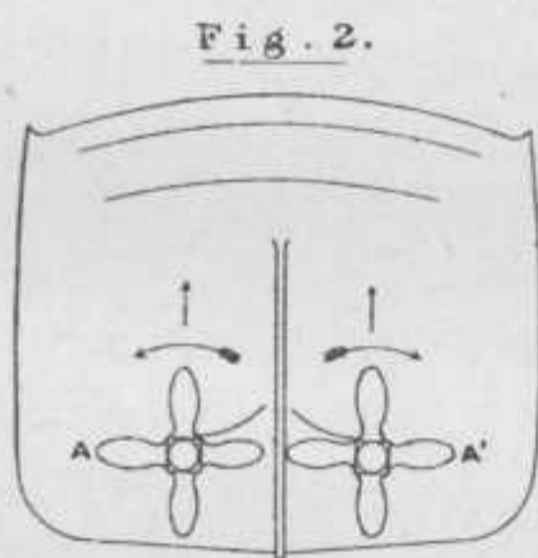


Fig. 2.

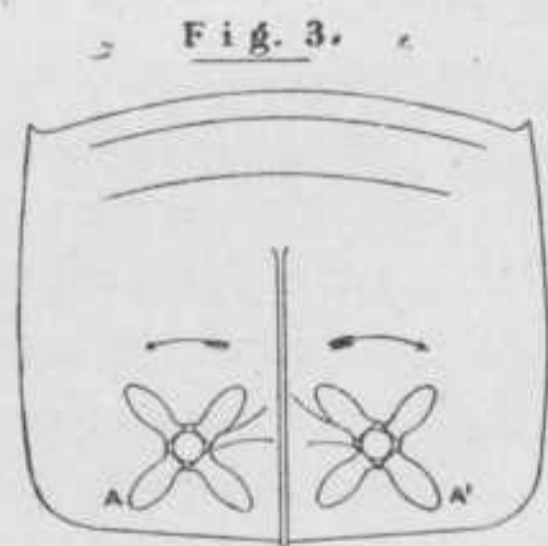


Fig. 3.

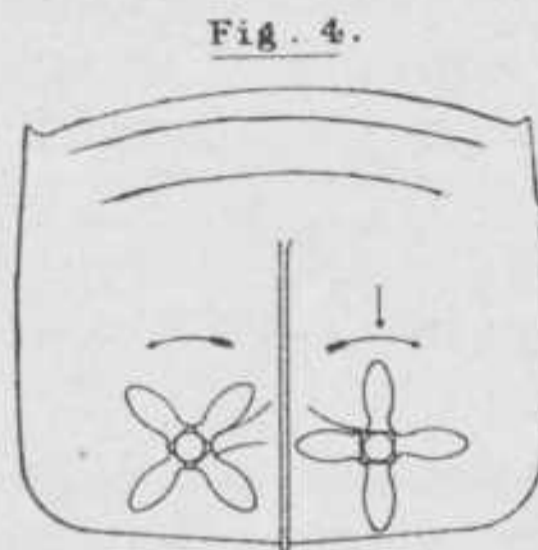


Fig. 4.

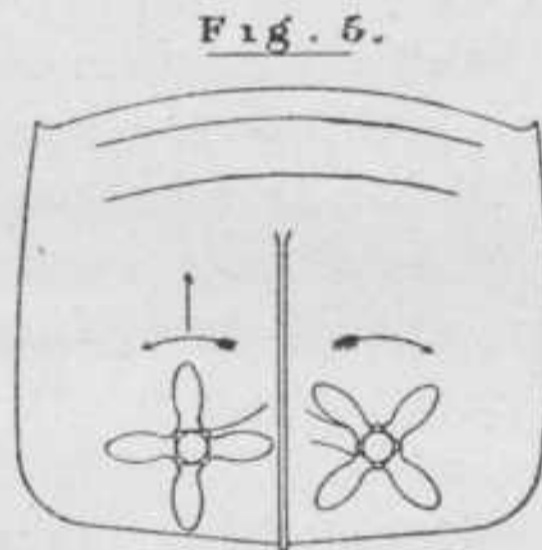


Fig. 5.

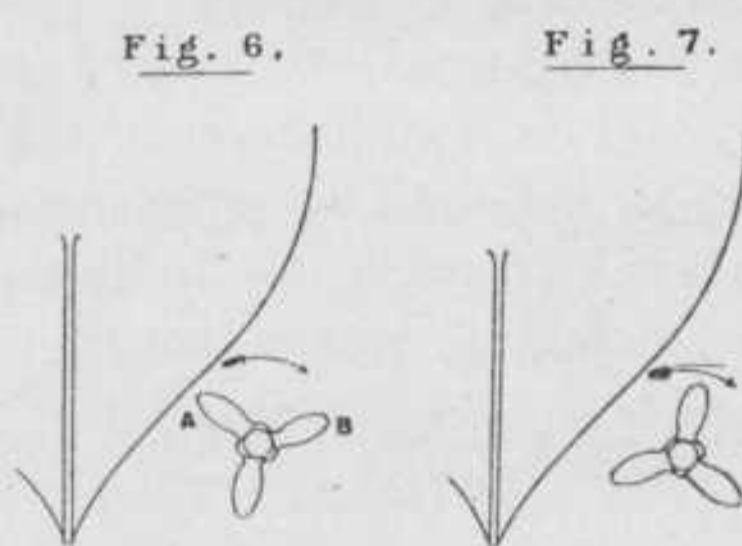


Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 5.

Dan balanceert men de machines zoo goed mogelijk uit en plaats de machine gunstig op een stijve fundatie.

De schroeven moeten met zorg worden vervaardigd, en de vorm van het achterschip zoodanig, dat het water ruim en goed gericht toestroomt.

Dan nog een deugdelijke bevestiging van de asstoelen, innig met het schip langsscheepsch en dwarsscheepsch verbonden, terwijl bij schepen met een groot vermogen een stijf achterschip gewenscht is.

Een bestaand schip dat trilt, te verbeteren, is vaak moeilijk. De pallograaf van Schlick kan weer uitstekende diensten bewijzen.

Zijn de schroeven schuldig, dan vervange men ze door nieuwe, misschien met een ander aantal bladen. De machines kunnen beter uitgebalanceerd worden door het aanbrengen van tegenwichten, of een nieuwe krukas met gewijzigde onderlinge hoeken van de krukken.

Indien men te doen heeft met synchronisme, kan men schroeven met grooteren spoed aanbrengen en door het vergrooten van de stoomtoelaat het volle vermogen blijven ontwikkelen bij geringer aantal toeren. Het schip zoodanig te versterken, dat het critisch aantal toeren belangrijk stijgt is niet wel mogelijk. Het aantal vrije trillingen toch, is evenredig met den wortel uit het traagheidsmoment van de doorsnede, en practisch zal het niet mogelijk zijn zooveel dubbelingsplaten en langsversterkingen aan te brengen, dat de waarde van den tweede machtswortel genoegzaam is gestegen.

De fundatie verstijven is misschien mogelijk, niet onwaarschijnlijk is dat men door den nood heel slim wordt, en een samenstel van middelen, die niet te duur zijn, met eenig succes toepast.

P. L. VAN DEN BERG, *s. i.*

Rotterdam, Mei 1914

Over uitlevering van metselspecies en beton.

Het is een bekend feit, dat in het algemeen oplossing gepaard gaat met volume-verandering; bij oplossing nu willen wij niet slechts denken aan het versmelten van eene vaste stof in een vloeistof, doch ook menging van twee vloeistoffen of vochtige vaste stoffen, waarbij een of

andere scheikundige verbinding tot stand komt. Het is bekend, dat bij samenvoeging van 1 liter alcohol en 1 liter water, men aanzienlijk minder verkrijgt dan 2 liter mengsel.

Iedereen zal wel voelen dat het noodig is voor den metselaar of aannemer, alvorens een juiste prijsberekening te kunnen opmaken, vooruit nauwkeurig vast te stellen, hoeveel droge stoffen er noodig zijn om 1 M³ specie of beton te verkrijgen. (Het afwegen geschiedt gewoonlijk òf ruw met schoppen of juister met nagemeten kruiwagens. Het cement is in den handel in zakjes van 50 K.G. = 40 L.) De aannemer rekent meestal, per M³ metselwerk te gebruiken 6 H.L. drooggemeten specie (levert uit $\frac{3}{5}$).

Bij begrooting van een betonwerk hangt de benodigde hoeveelheid cement zeer af van de samenstelling, evenals de uitlevering; waar er op dit gebied nog weinig is bekend, meenen wij dat een uitleveringstabel voor verschillende mengverhoudingen ten gelegener tijd wel zijn nut kan hebben.

Voor dengene, die daadwerkelijk met prijsberekening te maken krijgt, zij nog gegeven, dat men rekent:

a. voor metselwerk: arbeidsloon f 2.50 per M³, waarbij is aangenomen dat een metselaar 30 cts, een opperman 25 cts verdient, ¹⁾ er 666 Waalsteen noodig zijn voor 1 M³, en dat voegwerk kost f 0,35 per M².

b. voor betonwerk: een ploeg van 10 man kan \pm 15 M³ per dag storten (in een open put zonder vervoer). Hout voor bekisting heeft na het gebruik 50^{0,0} in waarde verloren; voor het stellen rekent men f 1.— per M². Vrij zeker kost ijzer buigen 1 cts per K.G. en vlechten 1,5 cts.

Tot de totale uitlevering dus van een of andere beton kan men komen òf met behulp van onderstaande tabel, òf door de volume-hoeveelheden der grondstoffen samen te tellen, ieder vermenigvuldigd met de volgende coëfficiënt:

Uitlevering van grondstoffen.

Portland cement.	0,48
Tras	0,48
Kalkdeeg	1,00
Hydraulische kalk	0,28
Zand.	0,60

¹⁾ Deze hooge prijzen werden uitbetaald in Zuid-Limburg.

Uitlevering van Mortels (maatdeelen).

Cement	Zand	Mortel
1 447 K.G.	3 1070 L.	2,8 1000 L.
1 532	2,5 1070	2,35 1000
1 641	2 1030	1,95 1000
4 697	7 980	7,16 1000
3 710	5 950	5,28 1000
2 744	3 894	3,36 1000
4 817	5 818	6,12 1000
1 893	1 715	1,4 1000

Uitlevering van beton.

Cement	Zand	Grint	Beton
1 196 K.G.	3 470 L.	6 940 L.	6,4 1000 L.
1 163	4 520	7 910	7,7 1000
1 148	6 720	6 720	8,5 1000
1 216	3 517	5 862	5,8 1000
2 234	5 467	10 935	10,7 1000
1 288	2 460	4 920	4,35 1000
3 332	5 443	10 987	11,28 1000
1 333	2 535	3 800	3,75 1000
2 358	3 431	6 862	6,96 1000
3 375	5 496	8 794	10,68 1000
4 380	7 532	10 760	13,16 1000
2 393	3 472	5 787	6,36 1000

Cement	Zand	Grint	Beton
1 397	2 635	2 635	3,15 1000
4 412	6 495	9 713	12,12 1000
2 434	3 521	4 695	5,76 1000
1 481	1 385	2 770	2,6 1000
1 625	1 500	1 500	2 1000

J. J. I. S.

Het maken van bruggen met eenvoudige middelen.

Het lijkt me niet onwaarschijnlijk, dat een ingenieur in de binnenlanden zittende om er een spoorweg of anderszins aan te leggen, somtijds in de noodzakelijkheid verkeert om met eenvoudig materiaal, hetzij planken, hetzij gevelde boomstammen, een eenvoudige tijdelijke brug te moeten slaan over het een of ander water. Daarom lijkt het me niet ondienstig hier te beschrijven hoe in zoo'n geval het handigst en vlugst aangepakt kan worden. De hier te beschrijven werkwijzen worden o. a. door de genie in tijd van oorlog toegepast.

Het eenvoudigst is als men drijvende ondersteuning, bijv. schuiten of vloten, tot zijn beschikking heeft, die in het water vastzet, en daarover de liggers en het dek legt.

Heeft men deze niet, dan moet men bijv. zijn toevlucht nemen, tot een:

Brug van gevelde boomstammen en touw.

Om de 5 M. worden eenvoudige van rondhouten geconstrueerde schragen geplaatst, en daarover de liggers en het dek.

Het landhoofd kan bestaan uit 2 boomstammen, één waarop en één waartegen de liggers steunen. Deze liggers worden in hun vaste stand verzekerd door piketten. Zie Fig. I.

De schraag. Eerst wordt de diepte van het water gepeild, op de plaatsen waar de pooten van de schraag komen te rusten, en de hoogte van het dek boven het water bepaald. Voor zakking wordt op 10 a 20 cM, afhankelijk van den bodem gerekend.

De hoofdafmetingen van de schraag zijn nu bepaald. Twee boomen, worden op een afstand van ± 3 M. evenwijdig aan elkaar op de oever gelegd. Deze dienen voor het gemakkelijk binden. Een boomstam van ± 20 cM. middellijn wordt er loodrecht opgelegd en hieraan evenwijdig op de gewenschte afstand een stam van ± 30 cM. die als draagkussen moet dienen.

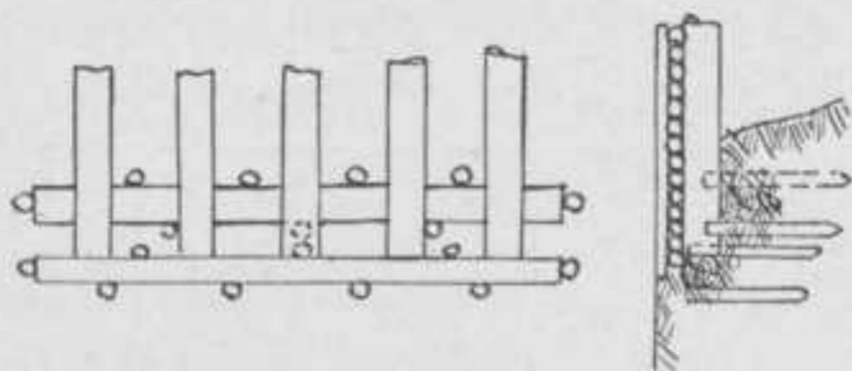


Fig. 1.

Over deze twee heen komen de beenen van de schraagstammen van ± 15 cM. middellijn. Wanneer deze 4 stammen in de juiste stand liggen, worden de hoeken vastgemaakt door kruissjorringen. Voor elke sjorring is een touw van ± 9 M. noodig. Hoe een kruissjorring gelegd wordt is o. a. te vinden in het boek van Prof. Van der Kloes. In 't algemeen kan gezegd worden dat de touwen elkander zooveel mogelijk moeten aandrukken, zoodat de grootst mogelijke wrijving optreedt. De mastworp moet altijd gelegd worden aan de tegen-gestelde kant waarvan de druk komt. Als de sjorring goed wordt gelegd, dan verschuift ze niet. Is men onzeker van zijn zaak dan kan men desnoods een spijker door het touw heenslaan.

De schoren worden nu aangebracht. Eén, die over de booten heengaat, en de ander van de ééne kant onder het been en aan de andere kant er boven, teneinde de schoren gelegenheid te geven elkander goed te kruisen. Stammen van 10—12 cM. zijn hier voldoende. Ze worden aan de beenen met kruissjorringen bevestigd en op hun kruispunt wordt een vorksjorring gelegd.

De eerste schraag is klaar.

Een tuitouw wordt met een timmermanssteek aan het draagkussen bevestigd en om de slikbalk heen geslagen. Dit touw moet voldoende dik en stevig zijn.

Aan het einde van elk been, wordt een opzet-spar gebonden, zoodanig dat er voldoende speling is, dat ze kunnen draaien om elkaar. Het beste is een versterkte mastworp zoowel aan schoor als poot. Twee stammen worden over het landhoofd heen met hun ondereind in het water gezet, en hier over de schraag in het water gegleden.

De mannen worden zooveel mogelijk gelijk verdeeld, twee aan elk tuitouw een paar aan iedere opzet-spar; en de rest over de schraag zelf. Deze laatsten voegen zich langzamerhand bij de opzet-sparren. De schraag wordt nu gedreven naar de plaats, waar zij moet komen te staan. Als deze bereikt is, worden de tuitouwen aan land met piketten vastgezet. De schraag wordt iets opgewipt, uit de opzet-sparren en dan opgeduwd tot hij in de rechte stand komt te staan. Bij elke spar blijven voorloopig 2 mannen staan, die omkantelen moeten beletten. Ook kunnen de sparren worden vastgebonden, twee sparren worden vervolgens over het draagkussen, op het landhoofd gelegd en daarover door middel van een sparretje de 5 langsliggers ($25-30$ cM. \varnothing) gerold.

De beide uiterste liggers worden met kruissjorringen zoowel aan het draagkussen als aan de landhoofdbalk vastgemaakt. De opzet-sparren kunnen nu worden verwijderd. Voor het dek worden sparretjes van 4—5 cM. middellijn gebruikt. Ze

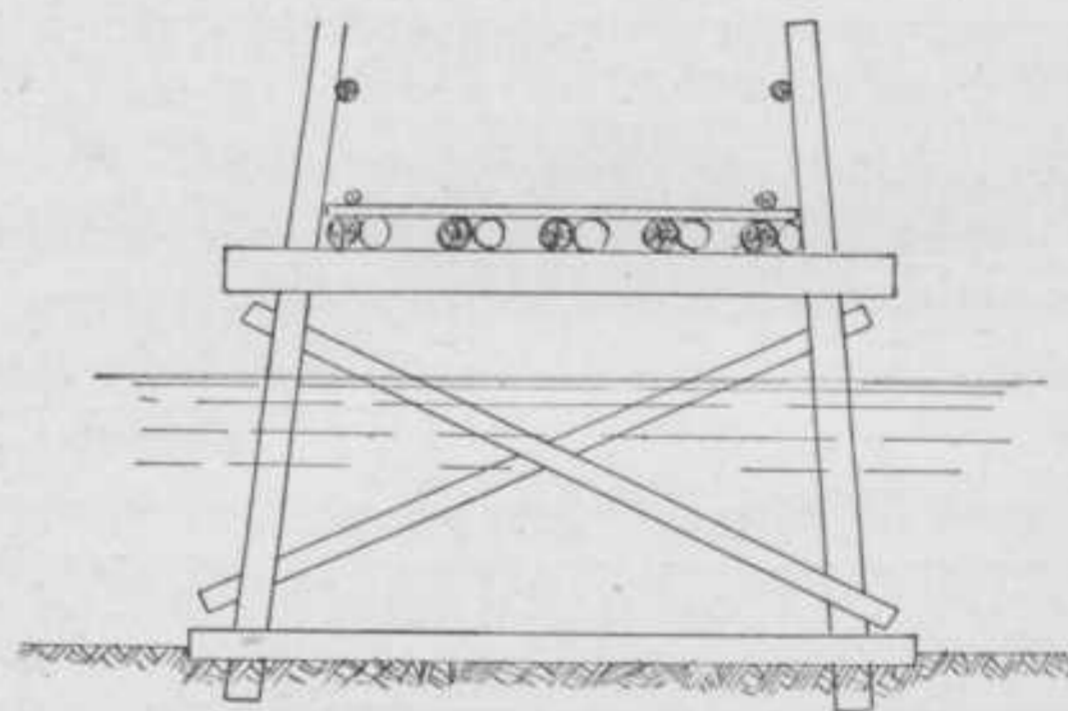


Fig. 2.

worden om den ander met het stameind naar links of naar rechts gelegd, en elk vak met 2 masten vastgesjord. Een eenvoudige leuning kan worden gebonden van het schraagbeen, waar een in de grond geslagen paal. De 2^e en volgende vakken worden evenzoo behandeld. Wanneer de omstandigheden gunstig zijn, en de mannen een beetje geoefend, dan kan op deze manier gemakkelijk door een man of tien ± 15 M. overspannen worden in 4 uur tijds. Dit kan natuurlijk alleen als het materiaal en het gereedschap aan de oever ligt. Begint men aan de 2 oevers tegelijk, dan gaat het natuurlijk veel vlugger doch is er dan meer personeel noodig. In oorlogstijd moet over deze bruggen de artillerie heen kunnen trekken. Het

Oppervlak Condensors.

brugdek wordt in dat geval afgemaakt met zoden en met zand. ¹⁾

Van planken en spijkers kan een dergelijke brug op dezelfde manier gemaakt worden. Hier hebben spijkers de voorkeur in tegenstelling met de rondhoutbrug, waar touw veel solieder is. Voor de slikbalk kan o. a. worden gebruikt 3 planken van 15 mM. dikte, voor de beenen twee, voor de schoren één en voor 't draagkussen drie planken

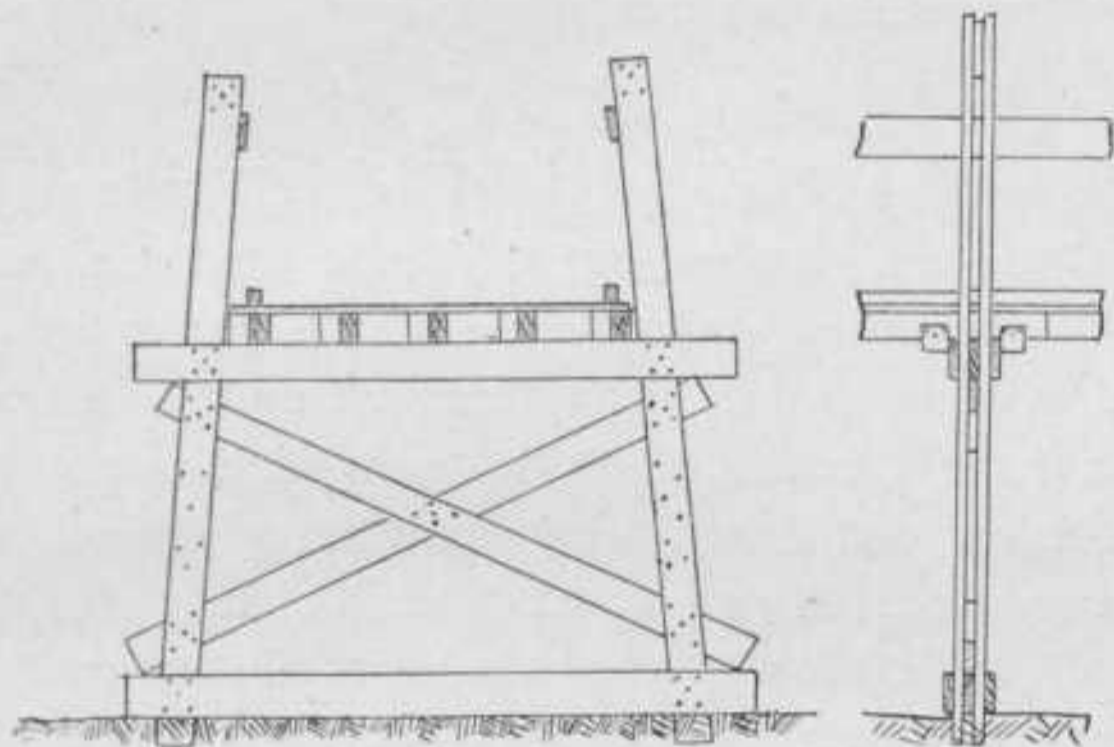


Fig. 3.

op elk knooppunt minstens 5 lange spijkers. De figuur geeft overigens de ineenzetting aan.

Het verdient aanbeveling het draagkussen niet direct vast te spijkeren, doch de middelste plank

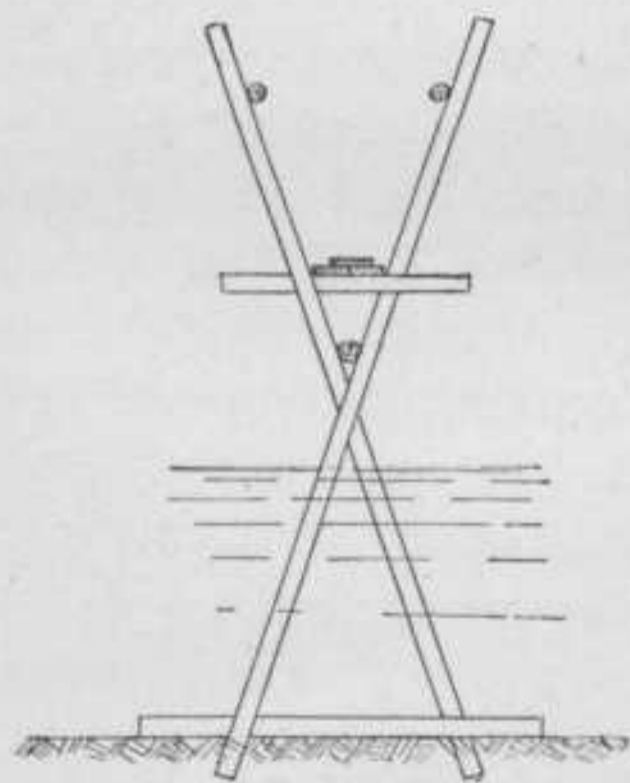


Fig. 4.

voorloopig te laten rusten op de schoren. Als de schraag gesteld is, kan het draagkussen worden vastgespijkerd. Doet men dit voordat de schraag te water ligt, dan wil het nog wel eens voorkomen dat het draagkussen niet op de goede hoogte of niet horizontaal komt.

De uiterste liggers worden bevestigd door klossen.

Nog even wilde ik er op wijzen hoe een aardig en handig vondertje in elkaar kan worden gezet. De werkwijze is als bij de brug. De figuur geeft de samenstelling aan. Met sparren van 10—12 cM. kan volstaan worden.

J. C. VAN DER MEIJ.

¹⁾ Napoleon maakte gebruik van deze brug, om over de Beresina te trekken. Het hout had echter te lichte afmetingen, met het bekende gevolg dat de brug instortte.

Bij alle warmte-overdracht is het „gemiddelde temperatuursverschil” een factor, waarmede de overgedragen warmte evenredig is.

Grashof geeft hiervoor de volgende formule:

$$\theta = \frac{t_u - t_i}{\ln \frac{t_s - t_i}{t_s - t_u}} \quad (1)$$

waarin voor een condensor:

t_s = temperatuur van den stoom behoorende bij condensorspanning.

t_i = temperatuur intree koelwater.

t_u = „ uittree koelwater.

Deze θ is op verschillende manieren te bepalen en hangt af van het vacuum en van de hoeveelheid koelwater.

Herberg (zie litteratuur) geeft voor het bepalen van het gemiddelde temperatuursverschil een tabelletje (blz. 229). Met een nep. logaritmen-tafel is de berekening ook gemakkelijk. In de voordracht over Oppervlak Condensors van D.Croll, wordt een graphische voorstelling (blz. 11) gegeven van de θ bij verschillende condensordrukken.

Wanneer nu F het verkoelend oppervlak is en Q de hoeveelheid koelwater per uur, dan is dus

$$F \theta k = Q (t_u - t_i) \quad (2)$$

waarin dan k voorstelt de hoeveelheid kaloriën, die per M^2 . verkoelend oppervlak, per graad temperatuursverschil en per uur overgaat, de z.g. „door-gangscoefficient”.

Deze coëfficiënt bestaat uit drie deelen:

α_1 = de overgang van stoom op wand;

λ = „ „ door den wand heen;

α_2 = „ „ van den wand op het water.

Wanneer nu δ = de wanddikte in meters dan is

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}.$$

De waarden van deze constanten verschillen nu bij de verschillende auteurs:

1^o. Ser: $\alpha_1 = 19000$.
 $\alpha_2 = 4500 \sqrt{v}$, wanneer snelheid koelwater = v M/sec.

$\lambda = 90$ per M^2 , 1^o, en $\delta = 1$ M.

Voor messingpijpen wanddikte $\delta = 1$ mm.

2^o. Seaton: $\alpha_1 = 15000 - 20000$; α_2 en λ als Ser.

3^o. *Holmboe*: volgens een proef van Josse

$$\alpha_1 \text{ en } \lambda \text{ als Ser en } \alpha_2 = 3250 \sqrt[1,3]{v}.$$

4^o. *Herberg*: $\alpha_1 = 8000.$

$$\alpha_2 = 300 + 1800 \sqrt{v}.$$

$$\lambda = 72 - 108.$$

5^o. *Hütte*: $\alpha_1 = 10000.$

$$\alpha_2 = 300 + 1800 \sqrt{v}.$$

$$\lambda = 50 - 60.$$

6^o. *Stodola*: $\alpha_1 = 20000$, volgens Josse.

$$\alpha_2 = 300 + 4500 \sqrt{v}.$$

$$\lambda = 90.$$

Wanneer we nu als koelwatersnelheid kiezen 2 M. per sec. wat door vele proeven als van Weighton en Croll gebleken is, de beste snelheid te zijn, waartoe we practisch veilig kunnen gaan, dan wordt de k voor de verschillende gegevens:

1^o. Ser $k = 4530.$

2^o. Seaton $k = 4250 - 4580.$

3^o. Holmboe $k = 4100.$

4^o. Herberg $k = 2050.$

5^o. Hütte $k = 2120 - 2140.$

6^o. Stodola $k = 4740.$

Zooals blijkt heeft de α_2 op de uitkomst de grootste invloed dus komt het ongeveer uit dat de doorgangscoefficient evenredig met \sqrt{v} is.

Ook Croll geeft dit als resultant van zijn proeven, mits de snelheid niet boven 2 M. gaat, om reden dat daarboven niet beproefd werd.

Joule en Ser geven het ook aan.

Wanneer nu $S =$ stoom K.G. per uur gecondenseerd,

$B =$ een constante,

$n =$ aantal malen koelwater t. o. v. K.G. stoom per uur,

dan kunnen we schrijven:

$$S = F \times \theta \times \sqrt{v} \times B \text{ en } Q = nS \quad (3)$$

want de hoeveelheid gecondenseerde stoom is evenredig met de gegeven grootheden en een constante. Noemen we deze: „belastingcoefficient”.

Vermenigvuldigen we met n dan wordt (3)

$$Q = F \times \theta \times n \times \sqrt{v} \times B. \quad (4)$$

Combineeren we (2) met (4) dan wordt dus

$$k = n \times \sqrt{v} \times B \times (t_u - t_i). \quad (5)$$

Nemen we de instroomtemperatuur koelwater aan op 20° C. en 0,1 K.G./c.M². vacuum (27") met $v = 2$ M./sec. en $n = 40$, dan is met de formule

$$Q = \frac{600}{t_u - t_i} \text{ (dus per K.G. stoom } Q = 40) : t_u = 35^\circ.$$

De temperatuur van stoom bij 0,1 K.G./c.M². is 45,6° waardoor met (1) $\theta = 17,5^\circ$ wordt.

Uit de formule (5) volgt

$$B = \frac{k}{n \sqrt{v} (t_u - t_i)} = \frac{k}{40 \cdot 1,414 \cdot 15}.$$

Vullen we de verschillende doorgangscoefficienten in dan vinden we dus voor

$$B = \begin{matrix} 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ & 4^\circ & 5^\circ & 6^\circ \\ 5,34; & 5 - 5,4; & 4,83; & 2,42; & 2,5 - 2,52; & 5,58. \end{matrix}$$

Deze rij getallen vergelijkende met de practisch gevonden waarden van Croll komen we tot de conclusie, dat, behalve de 4° en 5° de doorgangscoefficienten, n.l. de gemiddelde voor den geheelen condensor, uitstekend te gebruiken zijn voor de berekening van het verkoelend oppervlak. Croll vindt immers voor de verschillende proeven een B varieerende van 4,15 — 6,11.

Vullen we in formule (2) de waarde van θ (1) in dan kunnen we door $(t_u - t_i)$ deelen en wordt

$$F = \frac{Q}{k} \ln \frac{t_s - t_i}{t_s - t_u}. \quad (6)$$

Gebruiken we dus k van Ser, Seaton of Stodola dan komt de gevonden condensor overeen met condensers welke naar alle wenschen werkten. Maar dan moet de constructie ook goed in orde zijn, bijv. Contra flo, van Prof. Weighton, of Weir of Feyenoord condensor, desnoods nog de ronde mits met uitstekende schottenverdeling en directe afvoer van de condenseerde stoom van de pijpjes naar de uitlaat naar natte-pomp.

Formule (5) door $F =$ verkoelend oppervlak gedeeld geeft:

$$\text{K.G./M}^2./\text{uur} = \theta \times \sqrt{v} \times B. \quad (7)$$

Dit berekent voor de verschillende gevallen geeft met $\theta = 17,5^\circ$

$$\text{K.G. stoom } \frac{S}{F} = \begin{matrix} 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ & 6^\circ \\ 132; & 124 - 134; & 120; & 141. \end{matrix}$$

Stoomverbruik per I.P.K. bij Handels- en Passagiersschepen 7,5 — 9 K.G.

Marine 6,8 — 7,35 „

„ zeer licht 8 — 10 „

terwijl Seaton geeft als M². Verk. opp. per I.P.K., voor deze drie categorieën resp:

0,093 — 0,121 M²/I.P.K.
 0,075 — 0,102 en
 0,056 — 0,070 M²/I.P.K.

waardoor dus:

$$\text{K.G. stoom } \frac{S}{F} = \text{gem. } 77, 80, 143.$$

Met de proeven van Croll werd gemakkelijk 100, 120 K.G. M². bereikt en Weir en Weighton haalden zelfs 180 K.G./M²/uur.

Uit dit alles blijkt wel welke getallen goed te gebruiken zijn bij een vacuum van 90⁰/₀ n.l. een belastingcoëfficiënt van 5 — 5,6 en een doorgangscöefficient van 4500 — 4700 bij $v = 2$ M./sec.

Kiezen we n kleiner, dan wordt θ ook kleiner en dus ook de K.G. stoom per M²., hoewel de belastingscoëfficiënt hetzelfde blijft. De condensor blijft dus hetzelfde belast, krijgt dezelfde hoeveelheid stoom en minder koelwater en kan dus ook werkelijk niet meer condenseeren daar hij niet genoeg gekoeld wordt. Het vacuum bederft dus. Daardoor stijgt tegelijk θ weer, waardoor het mogelijk is dat de condensor met normaal aantal K.G. stoom M². belast is. De formules passen dus aan de practijk aan en geven voor andere dan de gekozen waarden ook goede uitkomsten.

Bij slecht vacuum wordt θ hoog en zou bij een zelfde belastingscoëfficiënt B , de K.G. stoom per M². V. K. O. te groot worden. Wanneer dus een hoog vacuum niet gewenscht is kunnen we dit bereiken door de watersnelheid kleiner te nemen (dus minder circuleeren); daardoor stijgt eenigszins de belastingscoëfficiënt weer en deze mag niet te hoog worden. Daarom kunnen we een slecht vacuum alleen bereiken door minder koelwater terwijl de watersnelheid niet lager moge dalen dan 1,44 M. per sec.
 Volgens Stodola wordt dan $k = 4225$
 en Ser $k = 4020$
 waardoor $B = 5,87$ en $5,6$.

Van formule (6) kunnen we ook een zelfde als (7) maken met door S te deelen en om te werken tot

$$\frac{S}{F} = \frac{k}{n \cdot \ln \frac{t_s - t_i}{t_s - t_u}}$$

Wie dus niet een belastingscoëfficiënt wil kiezen kan met deze formule en een doorgangscöefficient dezelfde uitkomst krijgen.

Dat Hütte en Herberg zoo'n lage k geven, zal wel aan eenig conservatisme te wijten zijn, terwijl

de opgaven van Seaton, die van Bauer zijn nog ongunstiger, met een zekere veiligheidsfactor gegeven zijn, waardoor dus de constructie niet volmaakt behoeft te zijn.

G. EKAMA.

Litteratuur.

- | | |
|-------------------------|---|
| <i>Herberg,</i> | Feuerungs-technik und Dampfkessel-technik; |
| <i>Stodola,</i> | Dampfturbinen; |
| <i>Hütte en Seaton;</i> | |
| <i>Croll,</i> | voordracht voor het gezelschap Leeghwater; |
| <i>Dubbel,</i> | Berechnen und Entwerfen der Dampfmaschinen. |
| <i>Bauer,</i> | Schiffsmaschinen und Kessel. |
| <i>Holmboe,</i> | Die Heissdampfschiffsmaschine. II Teil. |

Iets over „Wanderwellen”.

Het is niet mooi in een Hollandsch tijdschrift te beginnen met een Duitsch woord, maar het is in dit geval toch te verontschuldigen. Ik vermoed nl., dat dit woord „wanderwellen” misschien enkelen, te midden van hunne examenangsten, zal herinneren aan kalmere tijden, toen de gevaarlijke uren nog zoo ver af lagen en zij rustig hun tijdschriften zaten te bestudeeren. Zij zullen zich dan weer te binnen brengen hoe bijna in elk tijdschrift gesproken werd van „wanderwellen”, als van gevreesde, mystieke, booze geesten, die de electrotechnici overal lagen leggen. Nu weet ik tenslotte niet of er velen zoo zullen zijn, omdat ik soms zulke ongeloovige gezichten zie, wanneer er over een ander tijdschrift dan de E. T. Z. wordt gesproken, gezichten waarop te lezen is, „zou dat werkelijk bestaan” en ook is er wel eenige kans, dat diegenen, die zich dat woord „wanderwellen” herinneren, het niet verder brachten dan de titels der artikelen, omdat daaronder zooveel van die griezelige differentiaal-quotientjes en integralen de lezers aangrijpsden. Ja, het is nu eenmaal mode alles wat wiskunde is als overbodige geleerdheid te beschouwen, die de ingenieur niet noodig heeft, omdat het zoo vervelend is het te leeren.

Waarom ik nu juist over die vervelende dingen schrijf, ja, omdat de redactie mij vroeg in deze copie-arme tijd iets mede te deelen uit de nieuwere litteratuur. Maar omdat ik medelijden met de vermoeide lezers heb, zal het maar een praatje worden, zoo over de onderdeur, de formules met een stokje in het zand geschreven.

De „wanderwelle” — of laat ik nu verder liever spreken van de spanningsgolf — is de rage van het laatste jaar, het is de tango van den electro-technicus. Opwindend en revolutionair, zich niet storend aan oude zeden of begrippen, veracht door sommigen, vurig verdedigd door anderen. Zij is het middelpunt geworden van de overspanningstheoriën en heeft die voor een goed deel ten onderst boven gekeerd. Maar vanwaar kwamen dan zoo plotseling die nieuwe beschouwingen? Wel, ze waren in het geheel niet nieuw, maar evenals de herders in Argentinië reeds zoo langen tijd den tango gedanst hadden, zonder dat wij het wisten, zoo waren ook de sterkstroom-technici niet van het practisch belang dier theoriën omtrent de voortplanting van elektrische golven langs leidingen op de hoogte. Op een goeden dag bracht men de tango naar Parijs en hij sloeg in, werd de mode van het jaar, de zaligheid der vrouwen de passie van de mannen, omdat de wereld er op gewacht had, op iets dat emotie zou geven, afleiding in de verveling, dat een fijne nuanceering van meer of minder shocking meebracht, die het mogelijk maakte dat het in het nachtcafé voor piquant doorging en op de dansclub voor fatsoenlijk.

Zoo ging het ook met de spanningsgolven, Petersen bracht ze naar voren in zijn: „Wanderwellen als überspannungserreger”¹⁾ en liet ze duchtig rondbliksemen in de technische wereld, en het schijnbaar nieuwe vond overal ingang, alle vernielingen in schakelstations en centrales, alle door-geslagen windingen, verbrande transformatoren, aan scherven geslagen isolatoren, „wanderwellen” hadden het op hun geweten.

De tangowoede is nu geluwd, ook de „wanderwellen” theoriën worden nu kalmer beschouwd, hier en daar gaan er stemmen op, om niet alle stoornissen aan die golven toe te schrijven en in de eerste plaats te zoeken naar eenvoudige, dikwijls kleine oorzaken, welke die stoornissen zouden kunnen hebben teweeggebracht, fouten bij de constructie begaan, gebrekkig onderhoud, ondoelmatige inrichtingen.²⁾ Maar toch, er is uit deze rage zeer veel belangrijks overgebleven, een juister inzicht in het vraagstuk der overspanningen, dat het mogelijk maakt naar doeltreffende middelen te zoeken om de groote schade, die in zoovele installaties is aangericht, in de toekomst te voorkomen.

De gevreesde spanningsgolven kunnen optreden door de gewone handelingen die in een net noodig

zijn, zooals bijv. bij het inschakelen van leidingen; en door stoornissen van buiten: kortsluitingen of atmosferische ontladingen. Geen enkele toestandsverandering kan plotseling geschieden, de nieuwe toestand ontstaat geleidelijk uit den ouden, al is het ook in uiterst korten tijd. Zoo zal bijv. bij het inschakelen van een leiding, deze niet plotseling over zijn geheele lengte onder spanning komen, er plant zich een spanningsgolf van af de schakelaar voort langs de leiding met ongeveer lichtsnelheid. Een „wanderwelle” beweegt zich langs de leiding. Op dezelfde wijze gaan van af een punt waar kortsluiting ontstaat, ontladgolven naar beide zijden uit. Is de atmosfeer plaatselijk sterk geladen, dan zullen er bij de bliksemontlading, door de op dat oogenblik op de leiding vrijkomende lading, „wanderwellen” langs de leiding ontstaan, die zich voortplanten naar beide kanten. In sommige gevallen heerscht dus de spannings-toestand tusschen de leidingen onderling, in andere tusschen de geleiders en de aarde. De atmosferische ontladgolven kunnen allerlei willekeurige vormen hebben, de door schakelverrichtingen, kort- of aardsluitingen teweeggebrachte golven echter zijn zeer stijl. Daarin nu ligt het groote gevaar; door de golven met steil golffront ontstaan groote spanningsverschillen tusschen dicht bij elkaar liggende punten, bijv. tusschen twee windingen van een transformator. De gewone overspanningsbeveiligingen nu kunnen wel een te groote absolute waarde van de spanning voorkomen, voor de gevreesde spannings-sprongen, de steile golffronten helpen zij niets, zoodat zij het doorslaan van transformatoren of machines niet kunnen verhoeden. Het is langzamerhand gebruik geworden aan te nemen, dat de golven, die bij kortsluitingen of inschakelen ontstaan rechthoekig zijn en zelfs bespreekt men het zich voortplanten van deze golven in machines en transformatoren als een zeer gewone zaak. Nu lijkt het mij een groote fout zoo te spreken, zonder zich rekenschap te geven van het ontstaan van den rechthoekigen vorm en van de bijzondere aannamen die bij de analytische behandeling, tot dezen vorm hebben geleid. Het is soms nuttig met aanschouwelijke voorstellingen te werken zonder wiskundige berekeningen, maar als dit er toe leidt die voorstellingen als juist aan te nemen en daarvan als waren het feiten uit te redeneeren, zonder dat men de beperkingen in acht neemt, die alleen de infini-

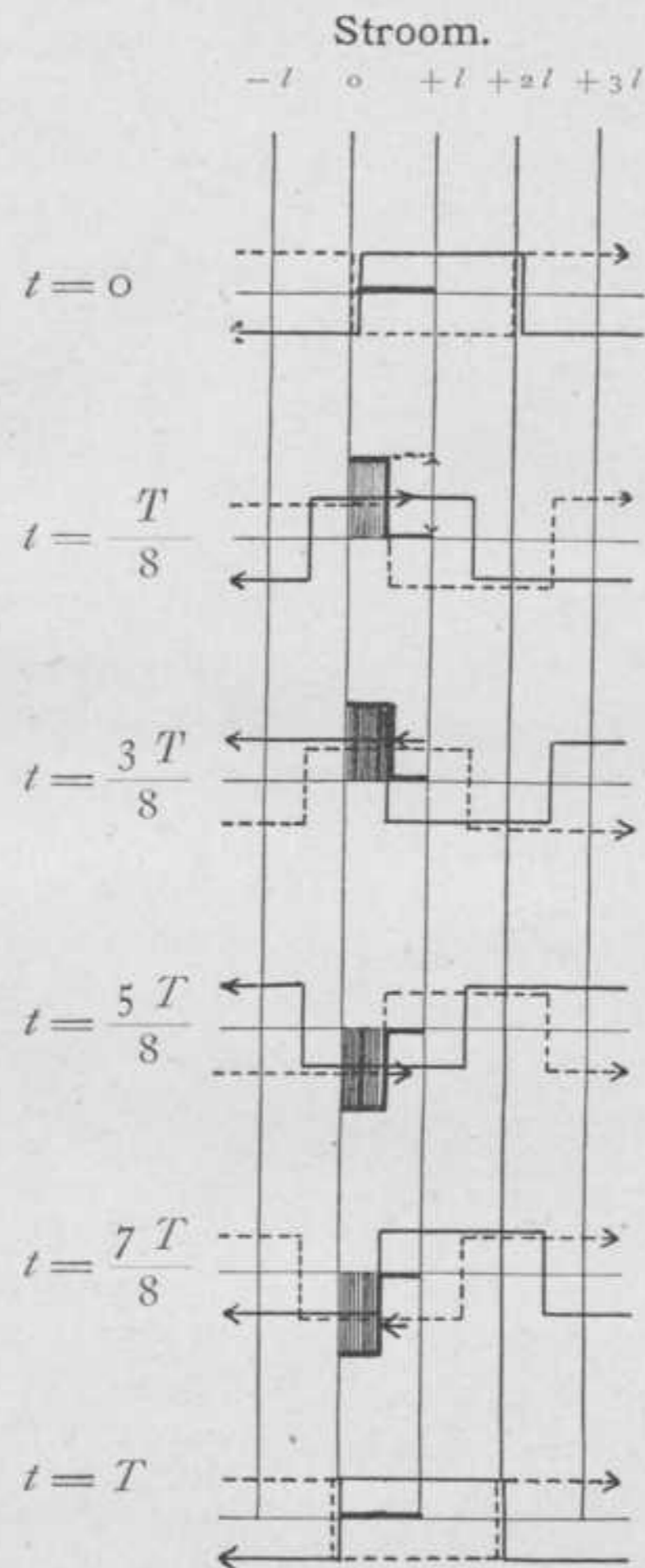
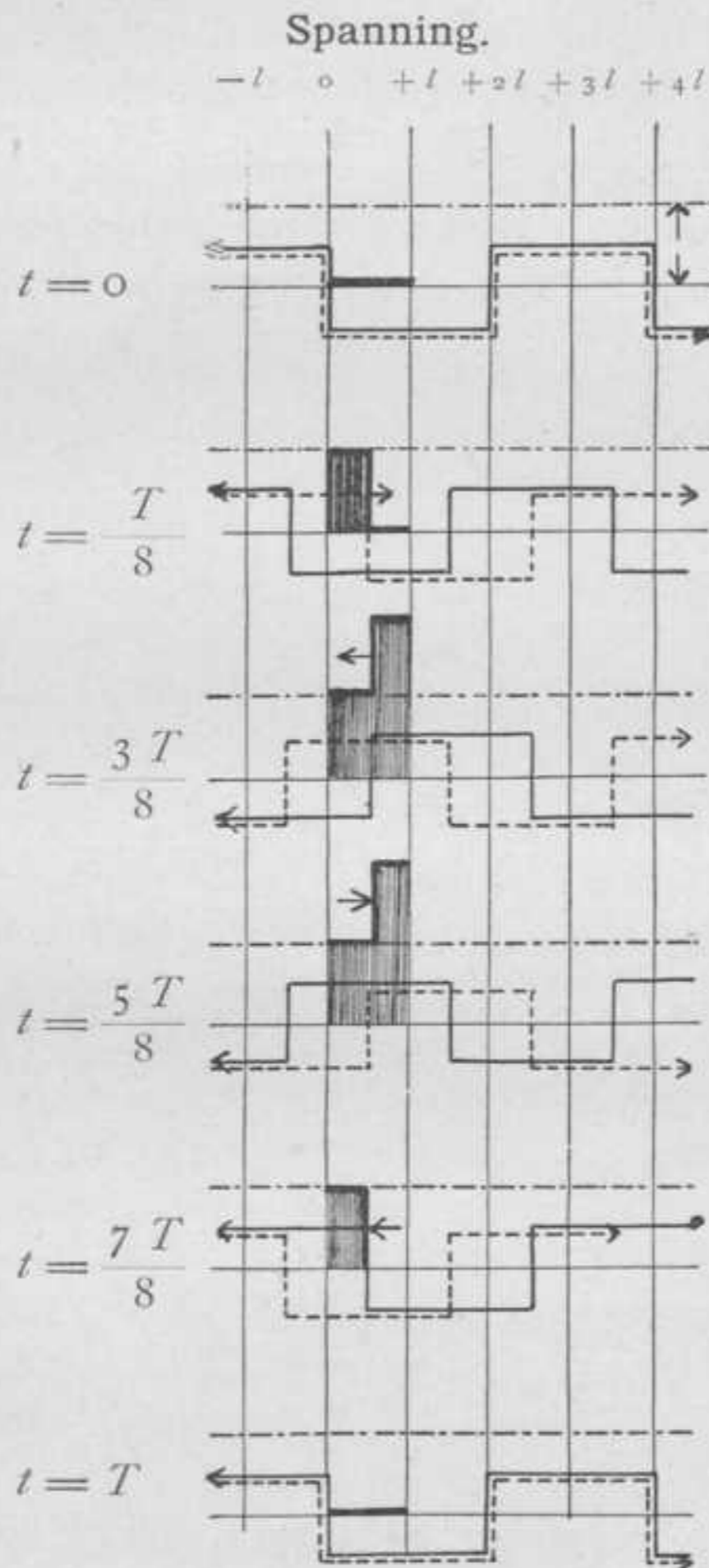
tesimaalrekening ons duidelijk kan maken, dan wordt dat populair bedrijf bedenkelijk. Het is vooral Petersen, die, met het goede doel voor oogen, gehoord te worden door alle ingenieurs, naar mijn bescheiden meening te ver is gegaan, door uit een populaire, vereenvoudigde en in vele opzichten benaderde voorstelling te ver strekkende conclusies te willen trekken. Onze tijd is nu eenmaal behept met den geest van populaire wetenschap, van het opkweken van menschen die van

met z . Beschouwen wij een stukje leiding, zoo kort, dat de verandering van i over dit stuk mag worden verwaarloosd, dan is:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = Ri + L \frac{di}{dt}$$

verwaarloost men de verandering van p over het kleine stukje leiding, dan is:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gp + C \frac{\partial p}{\partial t}$$



Inschakelen van een leiding, die aan het einde open is, op gelijkspanning.

alles en niets verstand hebben, een vrij onschuldig bedrijf, als dan ook maar die schijn van wetenschap niet voor echt wordt aangezien. Maar... ik leun te veel op mijn onderdeur, nu zal ik dus liever een paar krasjes in het zand maken.

Hoe ontstaan die rechthoekige golven?

Tellen wij de tijd t vanaf een zeker oogenblik $t=0$ en noemen den afstand $t/0$ van een punt van de leiding tot een willekeurig beginpunt x . Spanning en stroom zijn veranderlijk met x en

Men ziet dat dus beide vergelijkingen ophouden geldig te zijn wanneer spanning en stroom plotseling met x veranderen.

Een tweede, uiterst belangrijke aanname, die aan deze vergelijkingen ten grondslag ligt is, dat de spanning, resp. de stroom in een leidingselement slechts afhankelijk is van de spanning en stroom in datzelfde element. Met andere woorden *de invloed, die verschillende leidingselementen op elkaar uitoefenen wordt geheel verwaarloosd.* Het

is duidelijk, dat hierdoor elke toepassing op spoelen uitgesloten is. De wijze van voortplanting der golven in wikkelingen is te ingewikkeld om er analytische uitdrukkingen voor te vinden. De golf komt wel met een steil front aan de beginwindingen, maar wordt bij het verder binnendringen geheel vervormd. Gewoonlijk worden dergelijke wikkelingen opgevat als geconcentreerde zelfinducties, waarbij dus alleen de tijd als veranderlijke blijft bestaan.

In bovenstaande vergelijkingen zijn R , L , G en C resp. de weerstand, zelfinductie, afleiding en capaciteit per lengte-eenheid.

In praktische gevallen kan de G gewoonlijk verwaarloosd worden.

Men houdt dus over:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = R i + L \frac{\partial i}{\partial t} \dots \dots \dots (1)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial p}{\partial t} \dots \dots \dots (2)$$

Deze vergelijkingen duiden er op dat p en i partieële afgeleiden zijn van eenzelfde functie $\mathcal{Q} = f(x, t)$, zoodat:

$$p = \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x} \quad i = -C \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t}$$

gesubstitueerd geeft dit:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial x^2} = R C \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} + L C \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial t^2} \dots \dots \dots (3)$$

de oplossing van deze vergelijking is:

$$\mathcal{Q} = e^{-at} (A \sin nt + B \cos nt) (a \sin mx + B \cos mx) \dots \dots \dots (4)$$

of

$$\mathcal{Q} = e^{-at} (A \sin nt + B \cos nt) V$$

A , B , a en b zijn willekeurige integratie-constanten.

De algemeene oplossing der vergelijkingen (1) en (2) wordt dus:

$$p = e^{-at} \sum (A \sin nt + B \cos nt) V' \dots (5)$$

$$i = C e^{-at} \sum (B n \sin nt - A n \cos nt) V \dots (6)$$

Uit de vergelijkingen (4) (5) en (6) volgt dat alle bijzondere integralen der differentiaalvergelijkingen (3), (1) en (2) gedempte periodieke functies

zijn naar t en x met een frequentie $\frac{n}{2\pi}$ en een golflengte $\frac{2\pi}{m}$.

Nemen wij nu een bepaald geval, bv. het inschakelen van een aan het einde open leiding op

een gelijkspanningsbron van oneindige sterkte. De oogenblikkelijke waarden van spanning en stroom gedurende de vereffeningsperiode worden verkregen door superpositie van een vereffenings-toestand op de stationaire eindtoestand. Na invoering van de verschillende grenswaarden krijgt men dan voor de vereffeningstoestanden (3):

$$p = e^{-at} \{ f_2(x-vt) + f_1(x+vt) \}$$

$$i = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-at} \{ f_2(x-vt) - f_1(x+vt) \}$$

hierin is $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ de voortplantingsnelheid der golven.

Men ziet dat spanning en stroom bepaald worden door twee gedempte golven, die zich met gelijke snelheid v in tegengestelde richtingen voortbewegen. De stroomgolven zijn uit de spanninggolven af te leiden door deeling door $\sqrt{\frac{L}{C}}$,

de z.g. *golfweerstand*. Daar de analytische afleiding dezer uitkomst te veel ruimte zou vergen deelde ik hierboven slechts de eenvoudig geschreven uitkomsten mee. Beide golven bestaan uit de som van een oneindig aantal oneven harmonische sinussoïdes, m. a. w. het zijn rechthoekige golven. De amplitudo der rechthoekige spanninggolven is $\frac{E}{2}$, als E de spanning van den gelijkspanningsbron is. De beide oneindig lange rechthoekige golven trekken met ongeveer lichtsnelheid (v) in tegengestelde richting over de leiding. Superponeert men daarop de eindtoestand E , dan vindt men de oogenblikkelijke waarde van de spanning. Men heeft als in de geluidslere bij de orgelpijpen een aankomende en een teruggekaatste golf, die zich in tegengestelde richting bewegen. Aan het open leidingseinde nl. wordt de spanningsgolf onder gelijk teeken teruggekaatst. Van af dit oogenblik

(dat is na $t = \frac{1}{4} T$) wordt dus de spanning van de leiding de dubbele. Aan het begin, bij de oneindig sterke spanningsbron vindt terugkaatsing onder omkeering van teeken plaats. Na $t = \frac{1}{2} T$ wordt de spanning weer E , na $\frac{3}{4} T$, 0 enz. De spanning schommelt dus tusschen 0 en $2E$ om de evenwichtstoestand E en nadert tengevolge van de demping daartoe steeds meer.

De stroomgolf wordt aan het open einde terug-

De stroomgolf wordt aan het open einde terug-

gekaatst onder omkeering van teeken, de stroom op de leiding is nu $\frac{1}{2} I_0$, dan wordt bij het begin de terugkomende golf $-i$ teruggekaatst onder gelijk teeken, de stroom wordt dus nu $-i$ enz. De stroom schommelt tusschen $+i$ en $-i$ om de evenwichtstoestand $i=0$.

Deze eenvoudige uitkomst is bereikt door een aantal vereenvoudigende aannamen. In de eerste plaats zijn de R , L en C voor alle harmonische gelijk genomen. Het behoeft geen betoog, dat deze grootheden feitelijk sterk met de orde der harmonische veranderen. 2^e In den loop der afleiding

wordt er een term $\alpha^2 = \left(\frac{R}{2L}\right)^2$ verwaarloosd t. o.

van $\frac{m^2}{LC}$, waarin $m = 2\pi\lambda$, als λ de golflengte

der betrokken harmonische is. Verwaarloost men deze term niet, dan blijkt het, dat de golflengten der verschillende golven weliswaar in harmonische verhouding staan, de frequenties echter niet volkomen. De weerstand dempt dus niet alleen de golven, maar vervormt ze bovendien. 3^e Inschakelen op een oneindig sterke spanningsbron komt praktisch niet voor, in werkelijkheid loopt er een ontlaadgolf terug vanaf de schakelaar, terwijl de laadgolf de leiding op gaat. Hierdoor wordt de amplitudo verkleind. 4) Evenmin zal plotselinge inschakeling zonder eenige weerstand praktisch voorkomen.

En tenslotte is de uitkomst: rechthoekige golven, in strijd met de beginaanname, dat er geen sprongsgewijze verandering van spanning en stroom plaats heeft.

Men ziet dus, dat het wel eenigszins bedenkelijk is, zonder meer van rechthoekige golven te spreken.

Zuiverder oplossingen krijgt men door van de Maxwellsche vergelijkingen uit te gaan, 5) maar de vektoranalyse is wel wat te zwaar voor mijn buurpraatje.

H. G. N.

(Wordt vervolgd).

(1) W. Petersen. Archiv für Electrotechnik Bd. 1 blz. 233. E. T. Z. 1913, blz. 167, 204, 237, 267.

(2) Finckh. E. T. Z. 1913 blz. 1450.

(3) K. W. Wagner. Electromagnetische ausgleichsvorgänge in freileitungen und Kabeln. Teubner 1908.

(4) R. Rüdberg. Electrotechnik und Maschinenbau 1913, blz. 421.

(5) P. Verhoeckx. E. u. M. 1913, blz. 841, 866, 885.

Theoretisch en experimenteel onderzoek van vloeistofstroming.

De algemeene vergelijkingen van de vloeistofstroming, waarbij ook in rekening worden gebracht de invloed van inwendige wrijving en van dichtheidsveranderingen, zijn slechts in zeer bijzondere gevallen oplosbaar.

Wel is het mogelijk de strooming na te gaan van een vloeistof, die onsamendrukbaar en wrijvingsloos is, de zg. ideale vloeistof.

De studie van de strooming van de ideale vloeistof heeft niet alleen beteekenis als zelfstandige tak van toegepaste wiskunde; ze levert bovendien een uitgangspunt voor de beschouwingen, die de verschijnselen van de werkelijke strooming willen verklaren.

Het gaat daarmee als in de mechanica, waar de verschijnselen eerst worden bestudeerd, terwijl aangenomen wordt dat de wrijving nul is. Juist door de vergelijking der berekende uitkomsten met die der proefneming krijgt men gegevens omtrent de wrijving. Zoo kan b.v. de luchtweerstand bepaald worden uit val- en slingerproeven.

Aan de hand van een eenvoudig voorbeeld zullen we de strooming van de ideale vloeistof en die van lucht met elkaar vergelijken. Van een lichaam is bepaald ten eerste analytisch en ten tweede experimenteel (aan een model) de drukverdeling op het oppervlak.

De verschillen tusschen die beiden levert ons een beeld van de invloed van de inwendige wrijving. Is het verschil in één geval grooter dan in een ander, dan weten we, dat de verhouding tusschen wrijvingskrachten en traagheidskrachten in het ééne geval grooter was dan in het andere.

Volgens twee methoden kan de strooming van de ideale vloeistof worden onderzocht. De eerste is zuiver mathematisch en maakt gebruik van de resultaten der functie-theorie.

De andere, meer aanschouwelijke, is die, waarbij de strooming verkregen wordt door samenstelling van bekende stroomingsgroepen. We bedienen ons van de laatste.

Het is onmogelijk om bij de vorm van een lichaam langs analytischen weg de strooming aan te geven, daarom moet men andersom te werk gaan.

Door op geschikte wijze de bekende stroomings-

groepen te vereenigen kan men een stroomingsbeeld verkrijgen passende bij een lichaam, waarvan men de strooming wil leeren kennen.

Het eenvoudigste en meest gebruikte onderdeel waarmee een stroomveld kan worden opgebouwd is de bron.¹⁾ Van uit een bron stroomt vloeistof, die zich naar alle kanten gelijkmatig verspreidt.

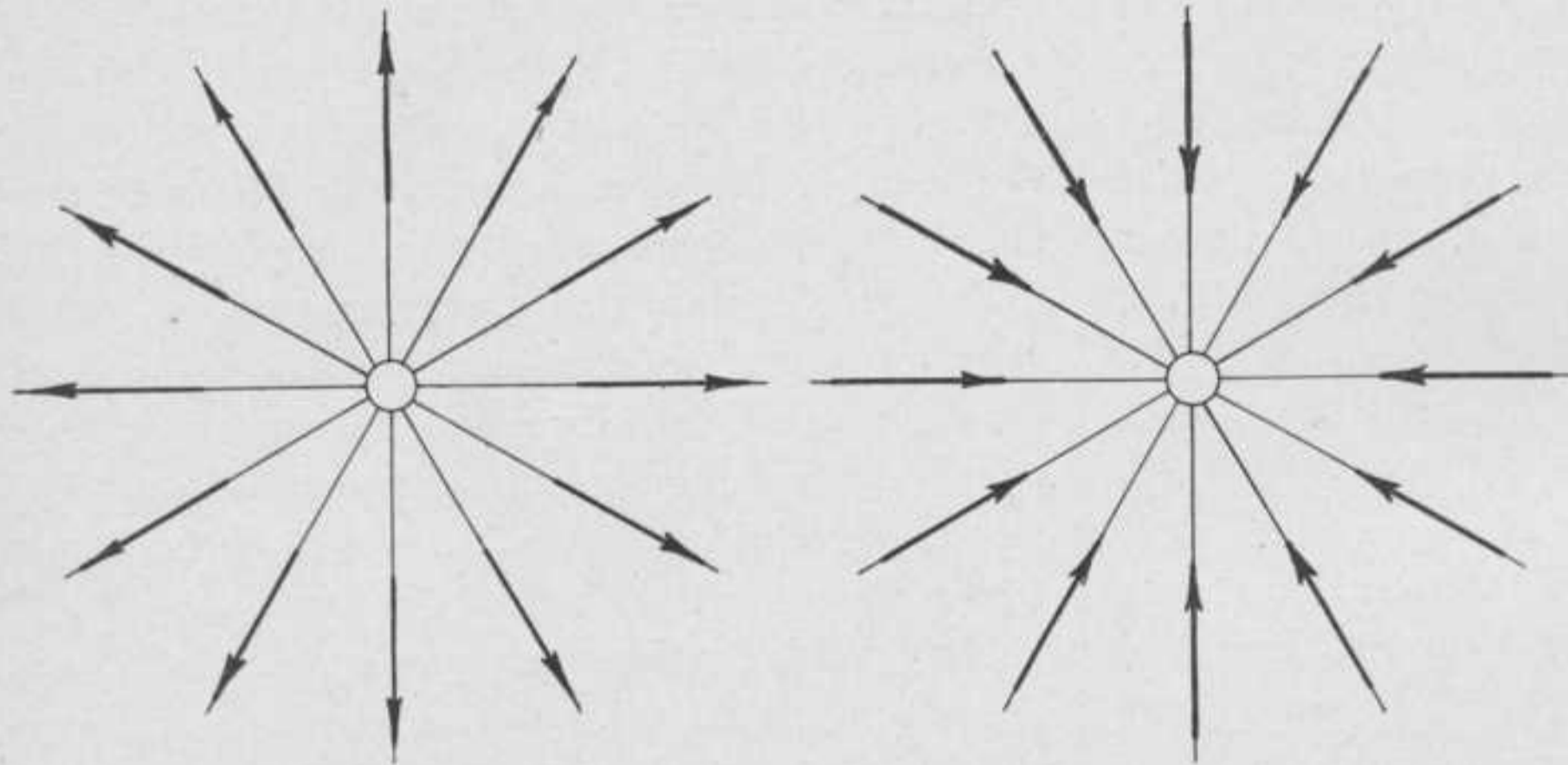


Fig. 1. Bron en put.

Bij een *put* doet zich het omgekeerde voor; in dat punt verdwijnt regelmatig een hoeveelheid, die wordt aangevuld door een toestrooming van alle kanten.

We zullen ons slechts bezighouden met stationaire stroomingen, zoodat de hoeveelheid vloeistof, per seconde komende uit een bron, onveranderlijk is.

Een *lijnvormige bron*, waarbij per lengte eenheid een bepaalde hoeveelheid per seconde uitstroomt, kan worden beschouwd als te zijn opgebouwd uit oneindig veel gelijke bronnen, die aansluitend op een lijn zijn gelegd. De strooming zal plaats hebben in platte vlakken loodrecht op de bronnenlijn. De strooming is twee-dimensionaal, want ze is bepaald door de strooming in één dier vlakken.

Om de snelheid in elk punt te leeren kennen, zullen we de strooming beschouwen tusschen twee van die vlakken met de eenheid van lengte als afstand. De snelheid is gericht volgens een voerstraal; op gelijke afstanden van de bron zijn de snelheden gelijk. Stel dat per seconde uit de bron per lengte-eenheid stroomt een volume $2\pi c$, dan

1) In de analoge velden van het magnetisme en de electrostatica is deze resp. de enkelvoudige pool en de puntlading.

zal dit bedrag van de onsamendrukbare vloeistof door coaxiale cylinders. Door de cylinder met straal r gaat door het oppervlak, groot $2\pi r$, de vloeistof met een radiale snelheid v_r , dus een volume van $2\pi r v_r$ per sec. dat gelijk moet zijn aan de bronsterkte $2\pi c = 2\pi r v_r$ dus: $v_r = \frac{c}{r}$.

We zien dus, dat de snelheid in een punt omgekeerd evenredig is met den afstand tot de bron.

In het volgende is ten doel gesteld te onderzoeken de strooming, die ontstaat bij een lijnvormige bron, die zich bevindt in een homogeen stroomveld, dit is een veld waarvan de deeltjes gelijke en gelijk gerichte eenparige snelheden bezitten. We zetten de lijn der bronnen loodrecht op de parallel-

strooming, de stroomrichting valt dus in het vlak loodrecht op de bronnenas; zoodoende blijft het een twee-dimensionaal probleem.

Het vlak door de bronnenlijn gebracht evenwijdig aan de parallelstrooming is vlak van symmetrie.

Figuur 2*) geeft ons een zuiver beeld der stroomlijnen. De naar rechts gelegen, uit de bron komende lijnen zijn met de stroom meegestuwd.

Langs de symmetrie-as naar links gaande zal de snelheid tengevolge van de bronnenstrooming steeds afnemen. Daar in elk punt ook een snelheid ($-a$) tengevolge van de parallel strooming naar rechts gericht, heerscht, zal bij samenstelling van de twee verschillende snelheden de snelheid,

$$V = \frac{c}{r},$$

door de waarde nul, de snelheid $-a$ asymptotisch naderen. De grafische voorstelling van de snelheid langs de as van symmetrie levert een gelijkzijdige hyperbool, waarvan de asymptoten worden voorgesteld door $x=0$ en $y=-a$.

Het punt waar de snelheid nul wordt heet stuwpunt; de stroomlijn door dit punt gaande vormt de grens tusschen de vloeistof, die uit de

*) Dit cliché is welwillend afgestaan door de Luft-Fahrzeug-Gesellschaft, Berlin.

bron komt en de vloeistof van de parallel-strooming die door de bronvloeistof is gesplitst.²⁾

Volgens definitie is in een punt de snelheid loodrecht op de stroomlijn gelijk nul.

Wordt een stroomvlak door een vaste wand vervangen, dan zal dit geen invloed op de strooming uitoefenen; in de wrijvingslooze vloeistof blijven tangentele spanningen immers uit. Op de plaats van de grensstroomlijn zetten we nu

dat door het oppervlak geen vloeistof stroomt, d.w.z. dat er door de bronnenstrooming evenveel door heen naar buiten stroomt, als door de parallel-strooming naar binnen. Dit toegepast voor het deel gelegen tusschen de voerstraal r en het stuw-punt S levert $ay = c\alpha$

$$ar \sin \alpha = c.$$

$$r = \frac{c}{a} \cdot \frac{\alpha}{\sin \alpha} \dots \dots (1)$$

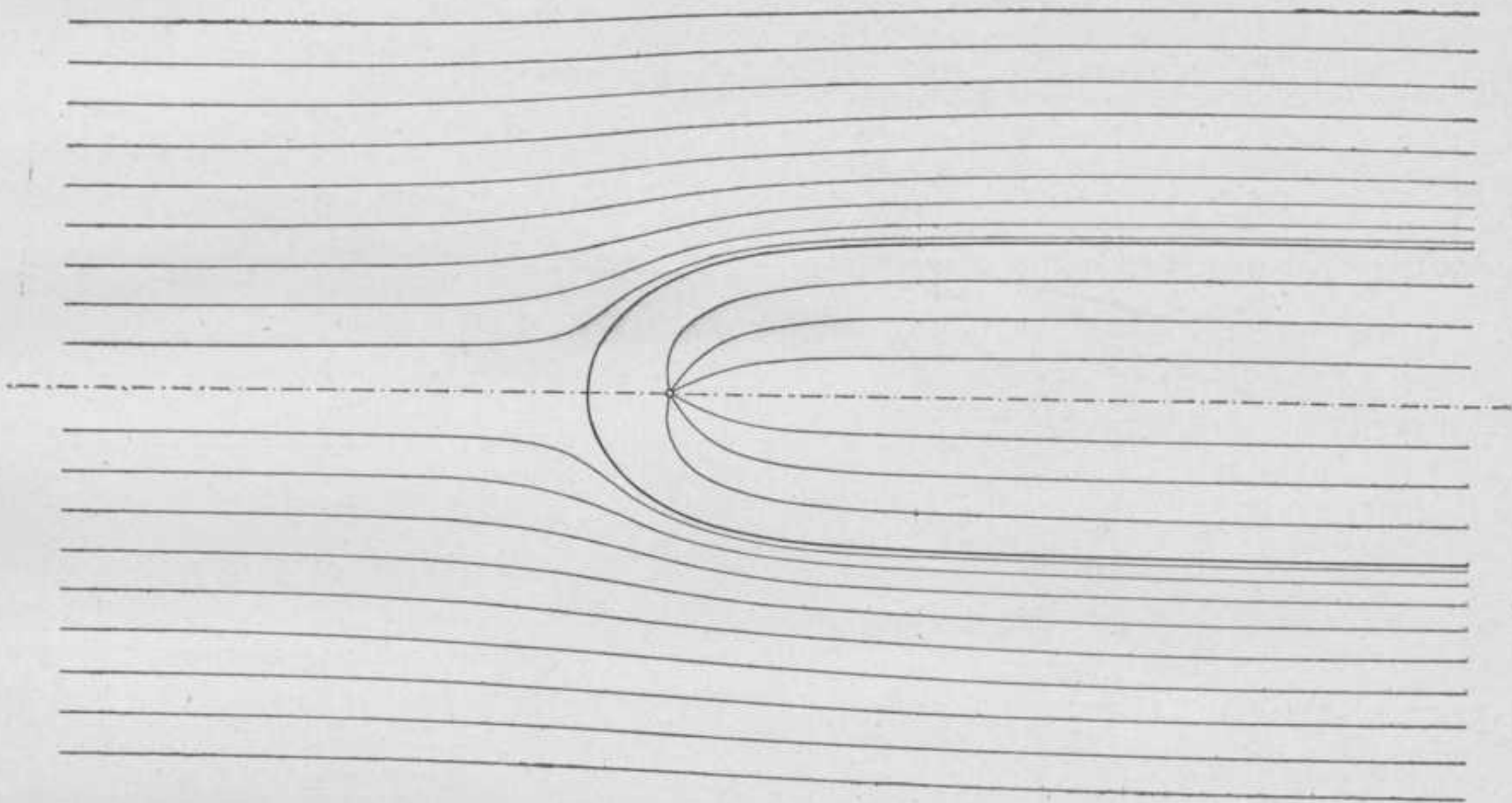


Fig. 2. Stroomlijnen om het halflichaam.

een vaste wand, een cylindervlak, dat de grenslijn tot rijkromme heeft.

Wordt nu de inwendige strooming weggenomen, dan zal, bij voldoende stijfheid, de wand zich niet vervormen.

Door gebruik te maken van een bron hebben we dus verkregen de strooming om een lichaam, het z.g. halflichaam, dat zich in één richting tot in het oneindige voortzet.³⁾

Een eenvoudige afleiding van de vergelijking van het oppervlak kunnen we geven door te bedenken,

²⁾ Een dergelijke strooming zal optreden bij een geperforeerde buis, waaruit water stroomt, terwijl de buis is ondergedompeld in stroomend water (b.v. in een rivier).

Dezelfde stroomlijnen treden op bij een vertikaal zakkende grondwater-beweging, waarin een horizontale draineerbuis water opneemt. De richting der strooming is de omgekeerde van die in het hier behandelde geval. (Zie litt. opg. Borgesius.)

³⁾ Daar de strooming om een bron wervelvrij is, zal ook de daarmee verkregen strooming wervelvrij zijn.

Voor $\alpha = 0 \quad r_0 = \frac{c}{a}$
 $\alpha = \frac{\pi}{2} \quad r = \frac{c}{a} \cdot \frac{\pi}{2}$
 $\alpha = \pi \quad r = \infty$

dan is $y = \frac{c}{a} \pi = b,$

dit is ook de vergelijking van een asymptoot.

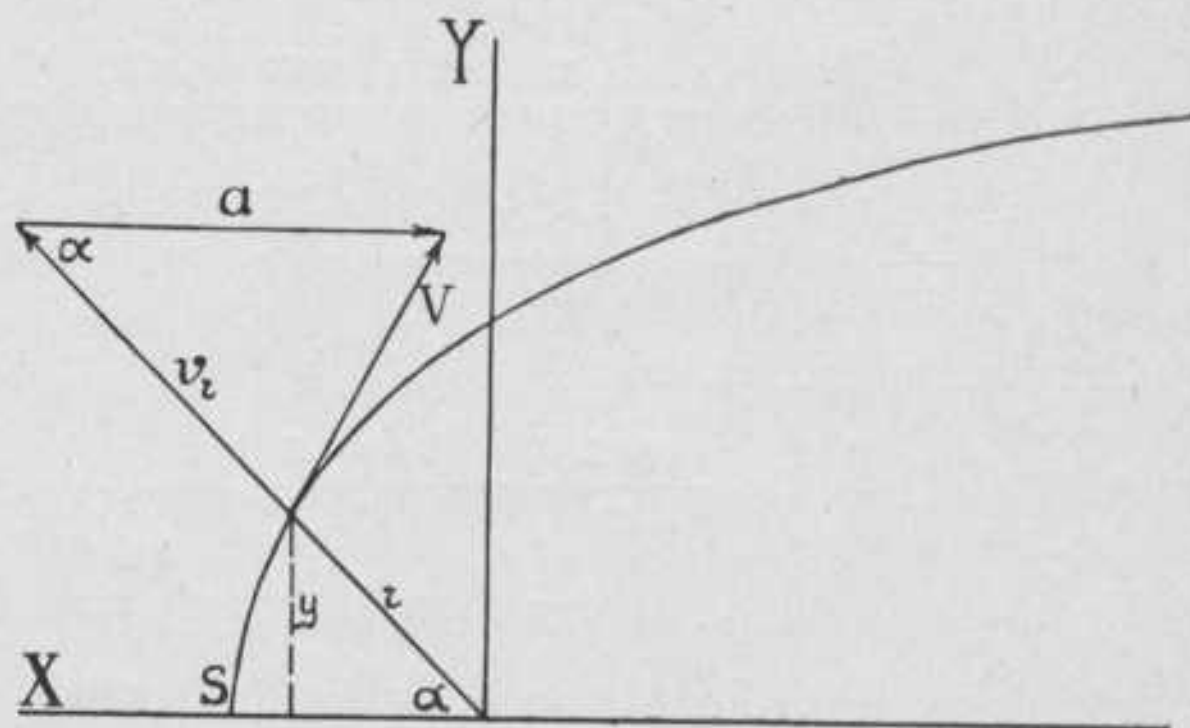


Fig. 3.

Voor de wrijvingslooze vloeistof geldt de vergelijking van Bernoulli, die we zullen toepassen om in een punt van het oppervlak de druk te vinden uit de snelheid in dat punt. Deze is:

$$Const. = p + \frac{\mu V^2}{2} = p_0 + \frac{\mu a^2}{2}$$

Hierin is p de druk, en V de snelheid in een punt μ de massa van de volume-eenheid.

Noem de snelheidshoogte van parallelstrooming

De getrokken lijn geeft weer de drukverdeling bepaald door experiment,⁴⁾ waarvan hier een korte beschrijving volgt.

Het model is van zink gemaakt en steekt aan beide zijden uit de luchtstroom, zoodat de strooming de vlakke wel dicht nabij zal komen.

De vrije luchtstraal heeft een middellijn van 80 cM.; de meting werd uitgevoerd bij een snelheid ongeveer 7 Meter per secunde, de stuwdruk bedraagt

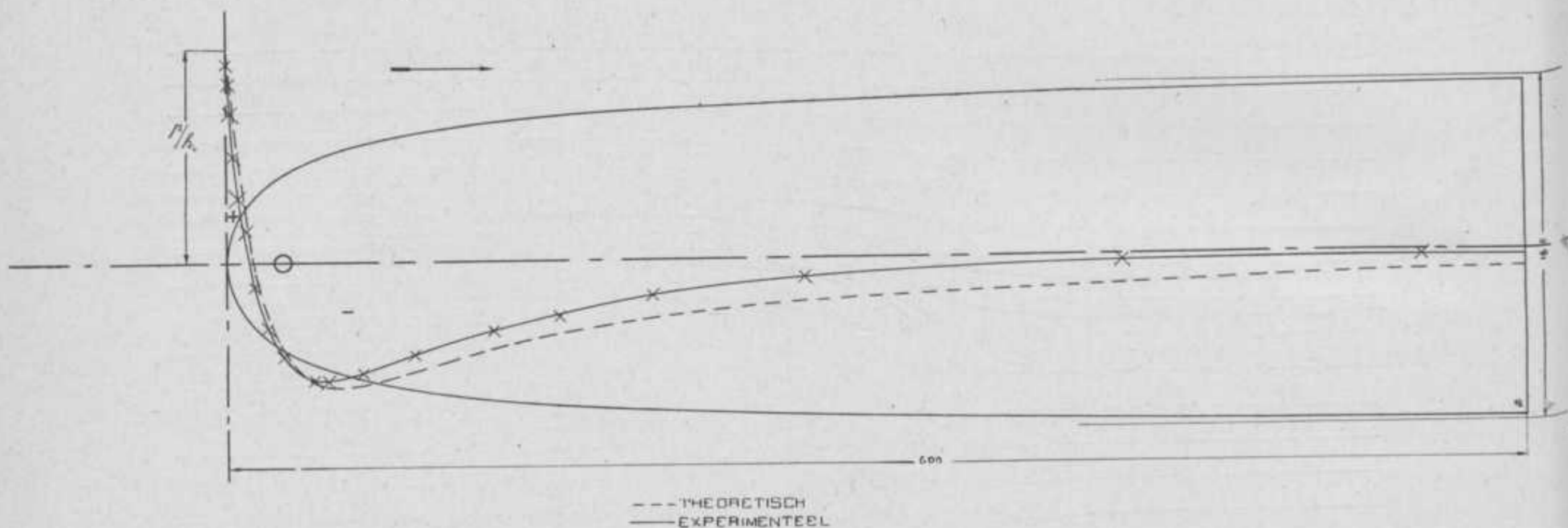


Fig. 4. Drukverdeling op het halflichaam.

$$h_0 = \frac{\mu a^2}{2}; \text{ verder } h = \frac{\mu V^2}{2} \quad p = h_0 - h$$

$$\frac{p}{h_0} = 1 - \frac{h}{h_0} = 1 - \left(\frac{V}{a}\right)^2 \dots (2)$$

In de ongestoorde vloeistof was de snelheid a en de druk p_0 , die we = 0 te stellen.

De snelheid V vinden we als resultante van a en v_r (fig. 3).

$$V^2 = a^2 + v_r^2 - 2av_r \cos d$$

$$v_r = \frac{c}{r}, \text{ waarin } r = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{\sin \alpha}$$

dus: $v_r = a \cdot \frac{\sin \alpha}{a}$, gesubstitueerd in de eerste vergelijking geeft:

$$V^2 = a^2 \left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} - \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{a} \right)$$

$$\frac{V^2}{a^2} = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} - \frac{\sin 2 \alpha}{a}$$

Gesubstitueerd in (2)

$$\frac{p}{h_0} = \frac{\sin 2 \alpha}{a} - \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} \dots (3)$$

In fig. 4 is de uit (3) gevonden waarde van $\frac{p}{h_0}$ uitgezet op de ordinaat van het punt (onderbroken lijn).

α	p/h_0		α	p/h_0	
	Berekend.	Experimenteel.		Berekend.	Experimenteel.
0	1,000	0,94	$\frac{19}{32} \pi$	— 0,561	— 0,552
$\frac{1}{16} \pi$	0,962	0,85	$\frac{5}{8} \pi$	— 0,582	— 0,552
$\frac{1}{8} \pi$	0,851	0,70	$\frac{11}{16} \pi$	— 0,578	— 0,523
$\frac{3}{16} \pi$	0,678	0,49	$\frac{2}{3} \pi$	— 0,515	— 0,433
$\frac{1}{4} \pi$	0,462	0,298	$\frac{13}{16} \pi$	— 0,409	— 0,328
$\frac{5}{16} \pi$	0,224	0,149	$\frac{27}{32} \pi$	— 0,349	— 0,268
$\frac{3}{8} \pi$	— 0,015	— 0,119	$\frac{7}{8} \pi$	— 0,277	— 0,164
$\frac{7}{16} \pi$	— 0,231	— 0,298	$\frac{29}{32} \pi$	— 0,203	— 0,090
$\frac{1}{2} \pi$	— 0,405	— 0,433	$\frac{15}{16} \pi$	— 0,134	— 0,030
$\frac{9}{16} \pi$	— 0,525	— 0,493	$\frac{61}{64} \pi$	— 0,095	— 0,030

(4) In het Aërodynamisch Laboratorium te Delft van de K. N. Vereeniging voor Luchtvaart, uitgevoerd door de studenten Venemans, Van Hengel en Von Baumhauer.

~ 3.5 m.m. waterkolom. Door twee vlakken dicht bij het midden en het oppervlak wordt een doos gevormd, die in verbinding gebracht wordt met een micromanometer.

Op een richtlijn zijn een twintigtal gaatjes aangebracht, die alle op één na worden gesloten, met wat vet. Uit andere metingen is bekend, dat de randen der gaatjes geen merkbaren invloed uitoefenen, zoodat men aan de manometer afleest de statische druk p van de bewegende lucht ter plaatse van het geopende gaatje. De gemeten druk eveneens uitgedrukt in de snelheidshoogte h_0 is in fig. 4 uitgezet; door de kruisjes is een continue kromme getrokken.

In het geheel genomen zien we een groote overeenkomst in het verloop van de twee lijnen, die toch op zoo geheel verschillende wijze zijn verkregen. De afwijkingen zijn het gevolg van den vertragende invloed van de inwendige wrijving; bijv. is de snelheid in het punt van minimum druk niet zoo hoog van lucht als van de ideale vloeistof. Ook in het verdere beloop van de druklijn zien we, dat de snelheid als spoedig weer bijna tot op zijn oorspronkelijk bedrag is gezakt, de druk is weldra bijna gelijk nul. We willen opmerken, dat de invloed van de samendrukbaarheid van lucht zelfs bij vliegsnelheden is te verwaarlozen. Bij deze snelheid van 7 M/sec volkomen, daar de stuwdruk slechts 0.00035 atmosfeer bedraagt. Lucht heeft dus de eigenschappen van een onsamendrukbaar gas.

De weerstand van eindige lichamen in de wrijvingslooze vloeistof is nul, want er wordt geen arbeid verricht. Voor het oneindig lange halflichaam kunnen we eveneens bewijzen, dat de weerstand gelijk nul is.

De weerstand op een strookje van de breedte ds en hoogte = 1 is de weerstand $\frac{dW}{h_0} = \frac{p}{h_0} ds \times \cos \varphi$ waarin φ de hoek is, die het elementje met de stroominrichting maakt.

Hier is de strooming volgens de X -as, dus $ds \cos \varphi = dy$; de weerstand van het elementje is dus $\frac{dW}{h_0} = \frac{p}{h_0} dy$; we zagen dat $y = \frac{c}{a} \alpha$, dus $\frac{dW}{h_0} = \frac{p}{h_0} \cdot \frac{c}{a} \cdot d\alpha$; voeren we in de waarde van

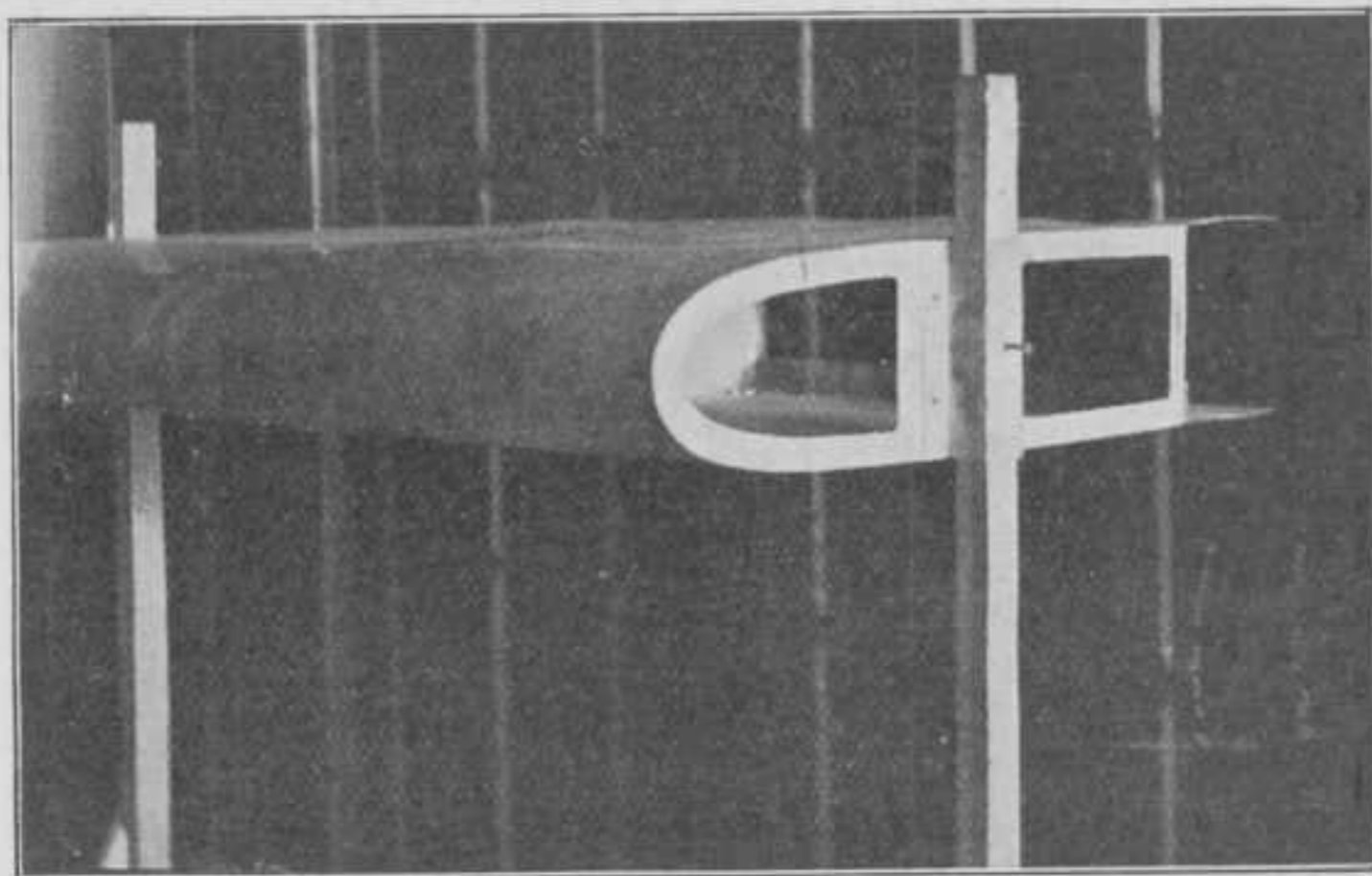


Fig. 5. Model van het halflichaam.

$\frac{p}{h_0}$ uit (3) voor de helft van het halflichaam, dan krijgen we

$$\frac{W}{h_0} = \frac{c}{a} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin 2\alpha}{\alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right) d\alpha$$

of:

$$\begin{aligned} \frac{W}{h_0} &= \frac{c}{a} \int_0^{\pi} \frac{\alpha \cdot d \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot d\alpha}{\alpha^2} = \\ &= \frac{c}{a} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \Big|_0^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

Het is niet van belang de weerstand van het model te onderzoeken, omdat de strooming achteraan geheel is veranderd door de wervelingen, die bij het eindige model achter het begrenzingsvlak optreden.

In het voorgaande hebben we de vergelijking voor de richtkromme van het cylindervlak en van de drukverdeling volgens de elementaire methode afgeleid.

We willen in het kort aangeven hoe we hiertoe kunnen komen met gebruik making van de snelheidsfunctie ϕ en de stroompotentiaal Ψ .

Bij een stationaire wervelvrije strooming worden de snelheidscomponenten volgens de assen voorgesteld door de partiële differentiaal quotienten naar de overeenkomstige richtingen.

$$\text{Zoodat } u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, w = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

De continuïteits-voorwaarde, dat per tijds-eenheid in een volume-element evenveel in- als uitstroomt,

wordt gegeven door de vergelijking van Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0.$$

In het geval van de twee-dimensionale strooming is $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ en vervalt $\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$.

Bepaling:

De stroompotential van een punt b (Ψ_b) wordt genoemd de hoeveelheid vloeistof, die in een laag van de hoogte één de lijn ab in de tijdseenheid overschrijdt, wanneer $\Psi_a = 0$.

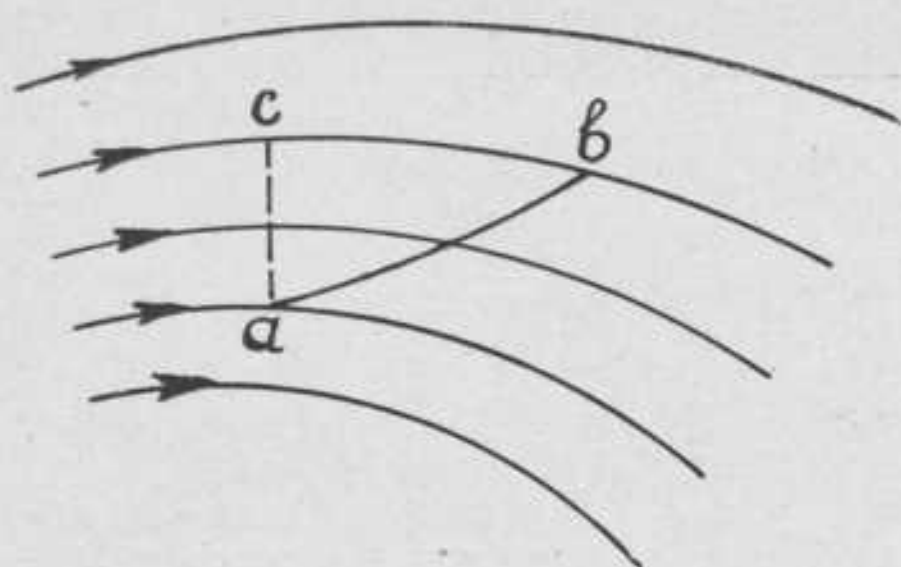


Fig. 6.

Het is onverschillig over welke verbindingslijn gemeten, tenminste wanneer er geen bronnen (positieve of negatieve) worden gepasseerd bij het verplaatsen van de verbindingslijn.

Over de gebroken lijn acb stroomt dezelfde hoeveelheid, als over ab , daar de hoeveelheid in de driehoek acb constant is.

Langs de stroomlijn is de verandering van ψ gelijk nul; dus $\psi = \text{constant}$ is de vergelijking van de stroomlijn.

De ψ kan genomen worden ten opzichte van een willekeurig punt p ; ten opzichte van een ander punt komt er bij de potential van p ten opzichte van dat nieuwe nulpunt.

We zullen de stroomfunctie het positieve teeken geven, wanneer de vloeistof de verbindingslijn van links naar rechts overschrijdt.

Voor de stroompotential geldt ook de vergelijking van Laplace

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

De snelheidscomponenten worden gevonden uit

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

De lijnen $\phi = \text{const.}$ en $\psi = \text{const.}$ snijden elkaar orthogonaal.

Deze beginselen passen we toe op de strooming om het halflichaam.

We noemen de stroompotential in het stuwpunt S $\psi_s = 0$.

$\psi_1 = -c\alpha$ deel van de bronstrooming.

$\psi_2 = ay = ar \sin \alpha$ deel van de parallelstrooming

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = ar \sin \alpha - c\alpha.$$

De algemeene vergelijking van de stroomlijn is dus $ar \sin \alpha - c\alpha = \text{const.}$

Van de stroomlijn door S gaande, geldt $ar \sin \alpha - c\alpha = 0$;

hieruit vinden we de reeds bekende betrekking, die voor de richtkromme van het oppervlak geldt

$$r = \frac{c}{a} \frac{\alpha}{\sin \alpha}.$$

Met behulp van de snelheidsfunctie kunnen we op eenvoudige wijze de snelheid in een punt van het oppervlak uitdrukken in r en α .

$\phi_1 = c \ln r$ deel van de bronstrooming.

$\phi_2 = -ax = -a \cos \alpha$ deel van de parallelstrooming.

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = c \ln r - a \cos \alpha.$$

We willen aangeven de component van de snelheid volgens de straal (v_r) en v_t , die er loodrecht opstaat.

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{c}{r} - a \cos \alpha,$$

$$v_t = \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \alpha}{\partial t},$$

nu is $r d\alpha = dt$ dus $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \times \frac{1}{r} = a \sin \alpha$.

De snelheid V wordt gevonden uit

$$V^2 = v_r^2 + v_t^2 = \frac{c^2}{r^2} - 2 \frac{ca}{r} \cos \alpha + a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha$$

substitueer $r = \frac{c}{a} \frac{\alpha}{\sin \alpha}$.

$$V^2 = a^2 \left(\frac{\sin 2\alpha}{\alpha^2} - \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} + a^2 \right),$$

welke betrekking wij gebruikten voor het bepalen van de druk.

We willen tenslotte nog eenige uitkomsten opnoemen van het onderzoek der samengestelde stroomingen.

Plaatst men op een lijn evenwijdig aan de parallelstrooming een puntvormige bron en op een bepaalde afstand daarachter een put van gelijke sterkte, dan verkrijgt men de strooming om een omwentelingslichaam, dat een symmetrievlak bezit, dat de verbindingslijn van bron en put loodrecht

middendoor deelt. Men kan nu de bron en de put tot elkaar doen naderen, evenwel zorgende, dat het product van bronsterkte en afstand constant is. Tenslotte verkrijgt men een z.g. dubbelbron, waarbij de bronsterkte oneindig groot, de afstand van bron tot put oneindig klein is. Het lichaam, dat nu de bronstrooming omsluit is een bol. Een lijn van dubbelbronnen levert de strooming om een cirkel-cylinder.

Men kan de bronnen en de putten ook een andere gedaante geven, zoodat de vorm van het lichaam een andere wordt; evenwel kan slechts het lichaam gesloten zijn wanneer de bronnen samen evenveel uitspuiten als door de putten gezamenlijk wordt opgenomen.

Door de bronnen en putten op een lijn te leggen, gericht volgens de parallelstrooming, kan men lichamen verkrijgen, die een gedaante hebben van de draaglichamen van bestuurbare ballons. *d)*

Omwentelingslichamen van verschillenden vorm, waarvan de as loodrecht staat op de parallelstrooming, zijn te verkrijgen door op zoo'n as een reeks dubbelbronnen te plaatsen. De sterkte van deze dubbelbronnen kan men op een bepaalde wijze langs de as verdeelen, waardoor een bepaald lichaam ontstaat.

A. G. v. B.

Litteratuuropgave.

- a)* Lanchester. Aerodynamies.
- b)* W. J. M. Rankine. On plane waterlines in two dimensions, Philosophical Transactions 1864, p. 369.
On the mathematical theory of streamlines, especially those with four foci and upwards. Philosophical Transactions 1871, p. 267.
- c)* Dr. A. H. Borgesius. Grondwaterbeweging in de omgeving van bronnen, de Ingenieur 1912.
B. teekent de stroomlijnen met behulp van een constructie, die eenvoudig kan verklaard worden met behulp van de vergelijking $ay = c\alpha$.
- d)* Dr. G. Fuhrmann. Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen.
Dissertatie Göttingen 1912, ook verschenen in het Jahrbuch der Motorluftschiff-Studiengesellschaft 1911—1912.
In het eerste deel wordt gegeven de strooming om een omwentelingshalfflichaam; met behulp van de daar aangegeven methoden wordt het eigenlijke onderwerp behandeld. Een voorname rol spelen de constructies ter oplossing der vergelijkingen $\psi = \text{constant}$.

Antwoord op Probleem II.

De door inzender zelve verworpen veronderstelling zal toch wel de eenig juiste zijn. Naar de photo te zien geeft hebben we hier te maken met een verlichting van 6 à 8 kaarsen. Deze verlichting (zonder 't Blitzlicht) is zoo onvoelende geweest, dat gedurende het korte oogenblik, dat 't toestel met geopend chassis in verticale richting bewogen werd, geen van de omringende voorwerpen, behalve de kaarsvlammetjes een beeld op de plaat vormden.

De strakheid van 't omringende werd dus bij de bliksemlichtopname niet geschaad, terwijl de vlammetjes door de beweging van het toestel reeds een lichtstreep gevormd hadden. Dit kan natuurlijk zoowel vóór als na de eigenlijke opname gebeurd zijn.

Steller kent toch wel de methode om zelve op bliksemlichtopname te komen? Zelve instellen en de lont aansteken en dan met behulp van een lichtbron (meestal een kaars) naar zijn plaats gaan. Van deze beweging gedaan bij geopend chassis is toch nooit iets op de plaat te bespeuren.

Van reflectie of van een verband met de opstijgende gaskolom kan bij deze zwakke lichtbron geen sprake zijn.

Zelve heb ik veel bliksemlichtopnamen gedaan, ook waar kaarsvlammen op voorkwamen. Door de zwakke lichtbron had ik op gewone platen ook geen last van hallo.

F. W. LUTTER.

EXAMEN-OPGAVEN.

Oplossingen van de Wiskundige Vraagstukken.

Prop. Examens - Mei 1914.

STELKUNDE.

(C. W. E. S.)

1. Bewijs de betrekking:

$$\begin{vmatrix} \beta + \gamma & \gamma + \alpha & \alpha + \beta \\ \beta' + \gamma' & \gamma' + \alpha' & \alpha' + \beta' \\ \beta'' + \gamma'' & \gamma'' + \alpha'' & \alpha'' + \beta'' \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \beta + \gamma & \gamma + \alpha & \alpha + \beta \\ \beta' + \gamma' & \gamma' + \alpha' & \alpha' + \beta' \\ \beta'' + \gamma'' & \gamma'' + \alpha'' & \alpha'' + \beta'' \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} \alpha + \beta + \gamma & \gamma + \alpha & \alpha + \beta \\ \alpha' + \beta' + \gamma' & \gamma' + \alpha' & \alpha' + \beta' \\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'' & \gamma'' + \alpha'' & \alpha'' + \beta'' \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} \beta & \gamma + \alpha & -\gamma \\ \beta' & \gamma' + \alpha' & -\gamma' \\ \beta'' & \gamma'' + \alpha'' & -\gamma'' \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \beta & \alpha & -\gamma \\ \beta' & \alpha' & -\gamma' \\ \beta'' & \alpha'' & -\gamma'' \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

2. Wat leeren omtrent de wortels van de vergelijking

$$x^3 - 6x^2 - 12x + 112 = 0,$$

- a. de regel van Descartes;
- b. het theorema van Rolle;
- c. het theorema van Sturm?

a. Het aantal variaties in de vergelijking bedraagt 2; het aantal pos. wortels bedraagt dus 2 of 0.

Substitueeren we voor x : $-y$, dan komt de vergelijking:

$$-y^3 - 6y^2 + 12y + 112 = 0,$$

die gelijke, maar tegengestelde wortels heeft als de eerste.

Het aantal variaties in deze vergel. is 1, de vergel. heeft dus 1 pos. wortel, de oorspronkelijke vergelijking heeft dus één negatieve wortel.

b. De vergelijking gedifferentieerd, geeft:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x - 12 &= 0. \\ x^2 - 4x - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Wortels: $x_1 = 2 + 2\sqrt{2}$. $x_2 = 2 - 2\sqrt{2}$.

In de oorspr. vergel. wordt het tweede lid: voor x gesubstitueerd:

$+\infty$:	pos.
$2 + 2\sqrt{2}$:	$56 + 40\sqrt{2} - 72 - 48\sqrt{2} - 24 - 24\sqrt{2} + 112 =$ pos.
$2 - 2\sqrt{2}$:	pos.
$-\infty$:	neg.

Het teeken verandert alleen tusschen de substituties $2 - 2\sqrt{2}$ en $-\infty$, waaruit volgt, dat de oorspronkelijke vergelijking één reële neg. wortel heeft tusschen $2 - 2\sqrt{2}$ en $-\infty$ en twee imaginaire wortels.

c. De Sturm'sche functies worden gevonden door de volgende bewerking:

$$\begin{array}{l} x^3 - 6x^2 - 12x + 112 = 0. \quad \text{Gedifferentieerd:} \\ 3/3x^2 - 12x - 12 = 0. \\ x^2 - 4x - 4. \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 4x - 4 & \begin{array}{l} x^3 - 6x^2 - 12x + 112 \\ x^3 - 4x^2 - 4x \\ \hline -2x^2 - 8x + 112 \\ -2x^2 + 8x + 8 \\ \hline -16x + 104 \\ 8 - 2x + 13 \end{array} & x - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -2x + 13 & \begin{array}{l} 2x^2 - 8x - 8 \\ + 2x^2 - 13x \\ \hline 5x - 8/2 \\ 10x - 16 \\ 10x - 65 \\ \hline 49 \end{array} & -x - 5 \end{array}$$

De Sturmsche functies zijn dus:

$$F_1: x^3 - 6x^2 - 12x + 112.$$

$$F_2: x^2 - 4x - 4.$$

$$F_3: 2x - 13.$$

$$F_4: -49.$$

Bij substitueeren van verschillende waarden voor x krijgen deze functies de volgende teekens:

$x =$	$+\infty$	0	$-\infty$	-10	-1	-2	-3	-4
F_1	+	+	-	-	+	+	+	0
F_2	+	-	+	+	+	+	+	
F_3	+	-	-	-	-	-	-	
F_4	-	-	-	-	-	-	-	
	1 var	1 var	2 var	2 var	1 var	1 var	1 var	

Uit de eerste 3 kolommen volgt, dat alleen één reële wortel ligt tusschen 0 en ∞ . Bij substitutie voor x van -10 , -1 , -2 , enz. blijkt eerst dat de wortel gelegen is tusschen 0 en -10 , en bij substitutie van -4 blijkt, dat dit juist de wortel is.

(*) Het teeken van de laatste Sturmsche functie F_4 waarop het alleen aankomt en dat hier gevonden is door voortgezette deeling kan ook op de volgende manier gevonden worden:

De waarde voor x , die de voorlaatste functie F_3 gelijk aan 0 maakt, $x = 6\frac{1}{2}$, gesubstitueerd in de voor voorlaatste functie F_2 , maakt deze positief, waaruit volgt, dat de laatste functie negatief is.

3. Los de vergelijking van het vorige vraagstuk rechtstreeks op.

Daar de vergelijking twee imaginaire wortels heeft, kan de methode van Cardanus worden toegepast.

Verdrijven van den tweeden term:

De vergelijking, waarvan de wortels alle p kleiner zijn, heeft den vorm:

$$(y + p)^3 - 6(y + p)^2 - 12(y + p) + 112 = 0.$$

Zal hierin de coëfficiënt van $y^2 = 0$ zijn, dan is:

$$3p - 6 = 0, p = 2.$$

De nieuwe vergelijking krijgt dan den vorm:

$$\begin{aligned} (y + 2)^3 - 6(y + 2)^2 - 12(y + 2) + 112 &= 0. \\ y^3 - 24y + 72 &= 0. \end{aligned}$$

Stel $y = u + v$:

$$\begin{aligned} (u + v)^3 - 24(u + v) + 72 &= 0. \\ u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 - 24(u + v) &= 72 = 0. \\ u^3 + v^3 + (u + v)(3uv - 24) + 72 &= 0. \quad (1) \end{aligned}$$

Stel $3uv - 24 = 0$.

$$uv = 8.$$

Invoeren in (1):

$$u^3 + v^3 = -72.$$

Op te lossen dus:

$$u^3 + v^3 = -72$$

$$uv = 8.$$

$$u^3 v^3 = 512.$$

u^3 en v^3 zijn de wortels van:

$$X^2 + 72X + 512 = 0.$$

$$X = -36 \pm \sqrt{584}.$$

$$= -36 \pm 28.$$

$$X_1 = -8.$$

$$X_2 = -64.$$

Welken wortel men voor u^3 , en welke voor v^3 kiest, is onverschillig, daar $y = u + v$ is.

$$\begin{aligned}
 u^3 &= -8. & v^3 &= -64. \\
 u_1 &= -2. & v_1 &= -4. \\
 u_2 &= 1 + i\sqrt[3]{3} & v_2 &= 2(1 + i\sqrt[3]{3}). \\
 u_3 &= 1 - i\sqrt[3]{3} & v_3 &= 2(1 - i\sqrt[3]{3}).
 \end{aligned}$$

Hieruit zouden 9 woorden voor $u + v$ volgen, daar echter het product $uv = 8 =$ reëel moet zijn, kan men alleen combineren:

$$u_1 \text{ en } v_1; u_2 \text{ en } v_3; u_3 \text{ en } v_2.$$

Hieruit volgen de 3 waarden voor y :

$$\begin{aligned}
 y_1 &= -2 - 4 = -6 \\
 y_2 &= 1 + i\sqrt[3]{3} + 2(1 - i\sqrt[3]{3}) = 3 - i\sqrt[3]{3}. \\
 y_3 &= 1 - i\sqrt[3]{3} + 2(1 + i\sqrt[3]{3}) = 3 + i\sqrt[3]{3}.
 \end{aligned}$$

De wortels x van de oorspronkelijke vergelijking zijn alle 2 meer, dus:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -4. \\
 x_2 &= 5 - i\sqrt[3]{3}. \\
 x_3 &= 5 + i\sqrt[3]{3}.
 \end{aligned}$$

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING.
(C. W. E. S.)

1. Bereken: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{\frac{x}{e^x - 1}}$

De limiet van den vorm onder het wortelteeken is $\frac{1}{e^x} = 1$, dus:

$$\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^{\frac{1}{x}} \text{ heeft den vorm } 1^\infty.$$

Stel $\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^{\frac{1}{x}} = p$,

en $p = \frac{1}{x} \{ \ln x - \ln(e^x - 1) \}$, dus:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln p = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x - \ln(e^x - 1)}{x}$$

De breuk in het tweede lid heeft de waarde $\frac{0}{0}$. Door toepassing van het theorema van l'Hopital vindt men:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \ln p &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{e^x}{e^x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x e^x}{x - (e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x e^x - e^x}{x e^x + e^x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x e^x}{x e^x + e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x e^x - e^x}{x e^x + e^x + e^x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{x + 2} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln p = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} p = e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{e}.$$

of:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{\frac{x}{e^x - 1}} = \sqrt[2]{e}.$$

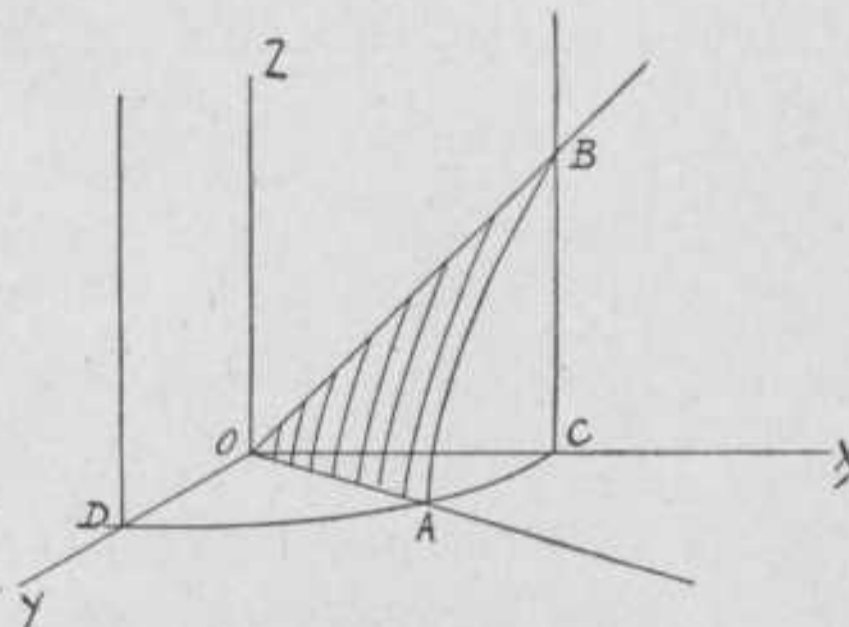
Bereken het deel van het oppervlak

$$z^2 = x^2 - y^2,$$

dat in den eersten ruimtehoek der coördinaatvlakken ligt en begrensd wordt door de vlakken

$$\begin{aligned}
 y &= 0 \\
 z &= 0 \\
 x^2 + 3y^2 &= 4.
 \end{aligned}$$

Het oppervlak van het gearceerde gedeelte moet bepaald worden. Men kan zich dit denken te bestaan uit een ∞ aantal driehoekjes, begrensd door twee beschrijvende lijnen van den kegel $z^2 = x^2 - y^2$ en een stukje van de kromme AB .



Bij gebruikmaking van cylinder-coördinaten, gaan de vergelijkingen van den kegel en van den cylinder over in:

$$\begin{aligned}
 z^2 &= \rho^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \rho^2 \cos 2\varphi \quad \dots (2). \\
 \rho^2 (\cos^2 \varphi + 3 \sin^2 \varphi) &= 4 \quad \dots (3).
 \end{aligned}$$

Zij de hoek die het raakvlak aan het kegeloppervlak maakt met xoy -vlak = α , dan is het gezochte oppervlak:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \frac{\rho^2 d\varphi}{\cos \alpha} \quad \dots (1).$$

De grenzen van φ worden bepaald door de X -as en de lijn OA , die met de X -as een hoek van $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ maakt.

Voor $\cos \alpha$ kunnen we schrijven

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}.$$

Ingevoerd in (1):

$$O = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^2 \cdot d\varphi \cdot \sqrt{\rho^2 + z^2}}{2 \cdot z} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \sqrt{\left(\frac{\rho^2}{z^2} + 1\right)} \cdot d\varphi \dots (4)$$

ρ en z moeten uitgedrukt worden in φ . Voor de punten der kromme AB .

Uit (2) en (3) volgt:

$$\begin{aligned}
 \rho^2 &= \frac{4}{\cos^2 \varphi + 3 \sin^2 \varphi} = \frac{4}{1 + 2 \sin^2 \varphi} = \frac{4}{2 - \cos 2\varphi}. \\
 \frac{\rho^2}{z^2} &= \frac{1}{\cos 2\varphi}.
 \end{aligned}$$

Ingevoerd in (4):

$$O = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\cos 2\varphi}\right)} \cdot d\varphi.$$

Stel $\cos 2\varphi = p$.

$$-\sin 2\varphi d 2\varphi = dp.$$

$$0 = \int_1^0 \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{p}}}{2 - p} \left(-\frac{dp}{\sqrt{1 - p^2}} \right).$$

$$= - \int_1^0 \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{p}}}{(2 - p)\sqrt{(1 - p)(1 + p)}} dp = -$$

$$= - \int_1^0 \frac{dp}{(2 - p)\sqrt{p(1 - p)}}.$$

Stel $\sqrt{p(1 - p)} = pz$,

$$p(1 - p) = p^2 z^2,$$

$$1 - p = p z^2,$$

$$p = \frac{1}{1 + z^2}, dp = -(1 + z^2)^{-2} 2z dz.$$

Invoeren:

$$0 = \int_0^{\infty} \frac{-(1 + z^2)^{-2} 2z dz}{\left(2 - \frac{1}{1 + z^2}\right) \frac{z}{1 + z^2}} = \int_0^{\infty} \frac{2z dz}{(1 + 2z^2)z}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{2 dz}{(1 + 2z^2)}.$$

Stel $2z^2 = q^2$,

$$z = \frac{1}{2} q \sqrt{2},$$

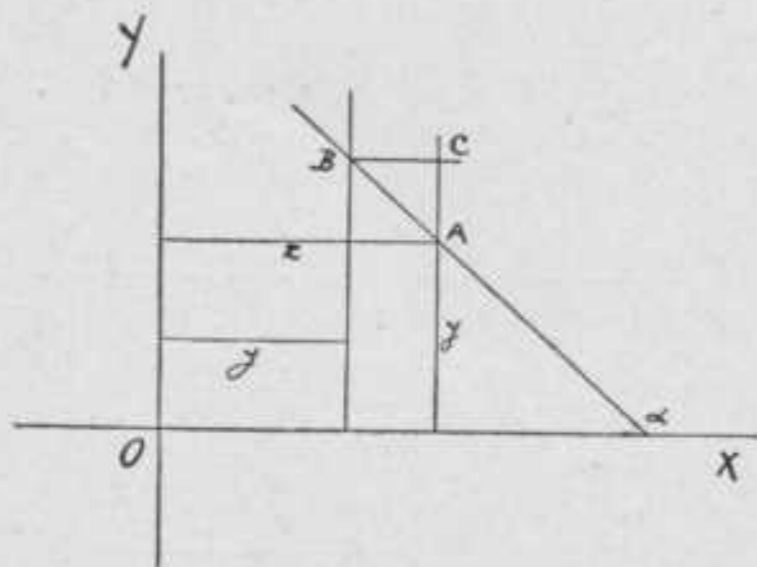
$$dz = \frac{1}{2} \sqrt{2} dq.$$

$$0 = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{2} \cdot dq}{1 + q^2} = \sqrt{2} \int_0^{\infty} \text{tg } q.$$

$$= \frac{1}{2} \pi \sqrt{2}.$$

3. De coördinaten van een willekeurig punt A eener vlakke kromme zijn x en y . Eene lijn, evenwijdig met de Y -as en op een afstand y daarvan verwijderd, wordt door de raaklijn in A in het punt B gesneden. Eene lijn, door B evenwijdig met de X -as getrokken, snijdt de ordinaat van het punt A in C .

Bepaal de vergelijking der kromme, als gegeven is dat zij door den oorsprong gaat en dat AC eene onveranderlijke lengte a bezit.



Zij AB de raaklijn in punt A , α de hoek, die ze maakt met de X -as, dan is $\text{tg } \alpha = \frac{dy}{dx}$.

In den ΔABC is $AC = \text{constant} = a$.

Verder: $BC = x - y$.

$\angle ABC = 180^\circ - \alpha$.

$AC = BC \text{tg } \angle ABC = -BC \text{tg } \alpha$.

$$a = -(x - y) \frac{dy}{dx}.$$

Dit is de differentiaalvergel. van de kromme.

Voor de oplossing stel: $y - x = z$.

$$\frac{dy}{dx} - 1 = \frac{dz}{dx}.$$

$$a = z \left(\frac{dz}{dx} + 1 \right)$$

$$a dx = z dz + z dx.$$

$$(a - z) dx = z dz.$$

$$dx = \frac{z}{a - z} dz = \frac{a}{a - z} dz - dz.$$

$$x = d \ln(a - z) - z + C.$$

$$z = y - x.$$

$$x = -a \ln(a + x - y) - y + x + C.$$

De kromme moet door den oorsprong gaan, dus $z = 0$, $y = 0$ moeten voldoen aan bovenstaande vergelijking.

$$0 = -a \ln a + C$$

$$C = a \ln a.$$

De vergelijking wordt:

$$x = -a \ln(a + x - y) - y + x + a \ln a$$

$$y = a \ln \frac{a}{a + x - y}.$$

$$\frac{y}{a} = \ln \frac{a}{a + x - y}.$$

$$e^{\frac{y}{a}} = \frac{a}{a + x - y} \cdot (a + x - y) e^{\frac{y}{a}} = a.$$

ANALYTISCHE MEETKUNDE.

(C. W. E. S.)

I. Bepaal de vergelijking van de kegelsnede gegeven door

$$x = a + bt + ct^2,$$

$$y = a_1 + b_1 t + c_1 t^2,$$

waarin t een veranderlijke parameter is.

Bepaal ook den aard van deze kegelsnede.

De gevraagde vergelijking is te vinden, door uit de twee gegeven vergelijkingen t te elimineeren.

Uit de twee vergelijkingen volgt:

$$c_1 x = a c_1 + b c_1 t + c c_1 t^2$$

$$c y = a_1 c + b_1 c t + c c_1 t^2$$

$$c_1 x - c y = a c_1 - a_1 c + b c_1 t - b_1 c t$$

waaruit:

$$t = \frac{c_1(x - a) - c(y - a_1)}{b c_1 - b_1 c}.$$

Deze waarde, ingevoerd in één van de twee gegeven vergelijkingen, bijv. de eerste, geeft:

$$x = a + b \frac{c_1(x - a) - c(y - a_1)}{b c_1 - b_1 c} +$$

$$+ c \frac{c_1^2(x-a)^2 + c^2(y-a_1)^2 - 2cc_1(x-a)(y-a_1)}{(bc_1 - b_1c)^2}$$

$$(bc_1 - b_1c)^2 x = a(bc_1 - b_1c)^2 + b(bc_1 - b_1c)$$

$$|c_1(x-a) - c(y-a_1)| + c|c_1^2(x-a)^2$$

$$+ c^2(y-a_1)^2 - 2cc_1(x-a)(y-a_1)|$$

$$(bc_1 - b_1c)^2(x-a) = bc_1(bc_1 - b_1c)(x-a) -$$

$$- bc(bc_1 - b_1c)(y-a_1)$$

$$+ c|c_1^2(x-a)^2 + c^2(y-a_1)^2 - 2cc_1(x-a)(y-a_1)$$

$$(-bc_1b_1c + b_1^2c^2)(x-a) = -bc(bc_1 - b_1c)(y-a_1)$$

$$+ c|c_1^2(x-a)^2 + c^2(y-a_1)^2 -$$

$$- 2cc_1(x-a)(y-a_1)|$$

$$cc_1^2(x-a)^2 - 2c^2c_1(x-a)(y-a_1) + c^3(y-a_1)^2 -$$

$$- bc(bc_1 - b_1c)(y-a_1)$$

$$- (b_1^2c^2 - bb_1cc_1)(x-a) = 0,$$

of:

$$c_1^2(x-a)^2 - 2cc_1(x-a)(y-a_1) + c^2(y-a_1)^2 -$$

$$- b_1(bc_1 + b_1c)(x-a)$$

$$- b(bc_1 + b_1c)(y-a_1) = 0.$$

Om de soort kegelsnede te onderzoeken, moeten we de waarden van D en H kennen.

Daarvoor is het gemakkelijk, eerst het punt $|a a_1|$ tot oorsprong te kiezen, zoodat de vergelijking wordt:

$$c_1^2 x^2 - 2cc_1 xy + c^2 y^2 -$$

$$- b_1(bc_1 + b_1c)x - b(bc_1 + b_1c)y = 0,$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ of in dit geval:}$$

$$\begin{vmatrix} c_1^2 & cc_1 & -\frac{1}{2}b_1(bc_1 + b_1c) \\ cc_1 & c^2 & -\frac{1}{2}b(bc_1 + b_1c) \\ -\frac{1}{2}b_1(bc_1 + b_1c) & -\frac{1}{2}b(bc_1 + b_1c) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}(bc_1 + b_1c)^2 \times \begin{vmatrix} c_1^2 & cc_1 & b_1 \\ cc_1 & c^2 & b \\ b_1 & b & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}(bc_1 + b_1c)^2 \times \left\{ b_1 \begin{vmatrix} cc_1 & c^2 \\ b_1 & b \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} c_1^2 & cc_1 \\ b_1 & b \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{4}(bc_1 + b_1c)^2 \times (b_1cc_1b - b_1^2c^2 - b^2c_1^2 + bb_1cc_1)$$

$$= -\frac{1}{4}(bc_1 + b_1c)^2 \times (bc_1 - b_1c)^2.$$

Dus $D \neq 0$.

$$H = \begin{vmatrix} c_1^2 & cc_1 \\ cc_1 & c^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Uit deze twee volgt, dat de kegelsnede een parabool is.

II. Bepaal de vergelijkingen van die raakvlakken aan de twee oppervlakken

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = p^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = q^2,$$

welke evenwijdig zijn aan het vlak

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Bewijs, dat de raakpunten dier vier vlakken op één rechte lijn liggen, en geef de vergelijkingen van deze lijn.

Beschouwen we het eerste oppervlak: De lijn, die de twee raakpunten verbindt, gaat door den oorsprong. Zij de vergelijking:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{1}.$$

Het vlak, hieraan toegevoegd in de hyperboloïde heeft tot vergelijking:

$$m \frac{\partial f}{\partial x} + n \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

of:

$$\frac{2mx}{a^2} + \frac{2ny}{b^2} - \frac{2z}{c^2} = 0.$$

De raakvlakken zijn // dit vlak, waaruit volgt:

$$\frac{m}{a^2} : A = \frac{n}{b^2} : B = -\frac{1}{c^2} : C.$$

$$m : n : 1 = -Aa^2 : -Bb^2 : Cc^2.$$

De vergelijking van de lijn is dus:

$$\frac{x}{Aa^2} = \frac{y}{Bb^2} = -\frac{z}{Cc^2} \dots (1)$$

Om de coördinaten van de snijpunten van deze lijn met het opp. te vinden, substitueeren we:

$$x = -z \cdot \frac{a^2 A}{c^2 C}, y = -z \cdot \frac{b^2 B}{c^2 C}.$$

$$z^2 \frac{a^2 A^2}{c^4 C^2} + z^2 \frac{b^2 B^2}{c^4 C^2} - \frac{z^2}{c^2} = p.$$

$$z^2 (a^2 A^2 + b^2 B^2 - c^2 C^2) = p c^4 C^2.$$

$$z = \mp c^2 C \sqrt{\frac{p}{a^2 A^2 + b^2 B^2 - c^2 C^2}} = \mp z_1$$

$$y = \pm b^2 B \sqrt{\frac{p}{a^2 A^2 + b^2 B^2 - c^2 C^2}} = \pm y_1$$

$$x = \pm a^2 A \sqrt{\frac{p}{a^2 A^2 + b^2 B^2 - c^2 C^2}} = \pm x_1$$

De vergelijkingen van de gevraagde raakvlakken zijn dus:

$$A(x \mp x_1) + B(y \mp y_1) + C(z \pm z_1) = 0.$$

De raakvlakken aan het tweede oppervlak krijgt men door in bovenstaande voor p te substitueeren q .

Dat de 4 raakpunten op een rechte lijn liggen, volgt uit de vergel. (1) van die lijn.

Daar hierin p niet voorkomt, krijgt men voor het tweede opp. dezelfde lijn.

III. Gegeven de kegelsnede

$$z = 0, y^2 = 2ax + b^2,$$

en de kegelsnede

$$x = 0, y^2 = 2cz + b^2.$$

Gevraagd welk regelvlak gevormd wordt door de rechten, die de beide kegelsneden ontmoeten en tevens evenwijdig zijn aan het vlak XOZ .

De vergelijking van een lijn // vlak XOZ kan geschreven worden:

$$y = p, \quad x = mz + n.$$

Deze lijn snijdt de eerste kegelsnede, waaruit volgt:

$$p^2 = 2an + b^2,$$

en uit de voorwaarde, dat de tweede gesneden wordt, volgt:

$$p^2 = -2c \frac{n}{m} + b^2,$$

De vergelijking van het regelvlak wordt gevonden, door p , m en n te elimineeren uit:

$$y = p \dots (1)$$

$$x = m z + n \dots (2)$$

$$p^2 = 2an + b^2 \dots (3)$$

$$p^2 = -2c \frac{n}{m} + b^2 \dots (4)$$

Uit (3) en (4) volgt:

$$2an = -2c \frac{n}{m}$$

$$am = -c$$

$$m = -\frac{c}{a} \dots (5)$$

Uit (3) volgt:

$$2an = p^2 - b^2 = y^2 - b^2$$

$$n = \frac{y^2 - b^2}{2a}$$

Alles gesubstitueerd in (2):

$$x = -\frac{c}{a} z + \frac{y^2 - b^2}{2a}$$

$$2ax + 2cz = y^2 - b^2$$

Opgemerkt kan nog worden, dat uit (5) volgt, dat m constant is. De richtlijn blijft dus evenwijdig aan zichzelf. Het beschreven oppervlak is een parabolische cylinder.

ANALYSE.

(B. T. M.)

1. Zoek waarden van x , die voldoen aan:

$$\begin{vmatrix} x^2 & ax & x & 1 \\ b^2 & ab & b & 1 \\ c^2 & bc & x & 1 \\ d^2 & ad & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^2 & ax & x & 1 \\ b^2 & ab & b & 1 \\ c^2 & bc & x & 1 \\ d^2 & ad & d & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & ax & x & 1 \\ b^2 - x^2 & ab - ax & b - x & 0 \\ c^2 & bc & x & 1 \\ d^2 - x^2 & ad - ax & d - x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-x)(d-x) \times \begin{vmatrix} x^2 & ax & x & 1 \\ b+x & a & 1 & 0 \\ c^2 & bc & x & 1 \\ d+x & a & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (b-x)(d-x) \times \begin{vmatrix} x^2 & ax & x & 1 \\ b-d & 0 & 0 & 0 \\ c^2 & bc & x & 1 \\ d+x & a & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(b-x)(d-x)(b-d) \times \begin{vmatrix} ax & x & 1 \\ bc & x & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(b-x)(d-x)(b-d) \times (bc - ax)$$

Hieruit volgen de wortels der vergelijking:

$$x_1 = b, x_2 = d, x_3 = \frac{bc}{a}$$

2. Van een kromme lijn is de vergelijking in recht-hoekige coördinaten:

$$(x-1)^2(x-4) + 6xy^2 = 0$$

a. Toon aan, dat deze kromme de Y -as tot eenigste

asymptoot, en het punt $x=1, y=0$ tot knooppunt heeft.

b. Bepaal de vergelijkingen der raaklijnen in dit knooppunt en toon verder aan, dat de kromme een lus heeft.

a. Asymptoten:

De termen van den hoogsten graad, gelijk aan 0 gesteld, geeft:

$$x^3 + 6xy^2 = 0$$

$$1 + 6\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$$

Dit geeft geen reële asymptoten.

$$x^3 + xy^2 = 0$$

$$\frac{x^3}{y^3} + 6\frac{x}{y} = 0$$

$$\frac{x}{y} = 0$$

Deze waarde bepaalt de eenigste reële asymptoot, een lijn // Y -as. Zij de vergelijking $x=p$, en zoeken we de coördinaten der snijpunten:

$$(p-1)^2(p-4) + 6py^2 = 0$$

$$y^2 = -\frac{(p-1)^2(p-4)}{p}$$

De eenigste waarde, die de $y \infty$ maakt, is 0.

Zoodat de vergelijking der asymptoot is:

$$x = 0, \text{ dus de } Y\text{-as is.}$$

b. Voor een willekeurig punt der kromme is:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{2(x-1)(x-4) + (x-1)^2 + 6y^2}{12xy}$$

Voor het punt $\{1, 0\}$ krijgt deze vorm de onbepaalde waarde $\frac{0}{0}$, zoodat dit punt een dubbelpunt is.

Om de richtingen der raaklijnen te vinden, passen we het theorema van l'Hôpital toe:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2(x-1)(x-4) + (x-1)^2 + 6y^2}{12xy} = -\frac{3x^2 - 12x + 9 + 6y^2}{12xy}$$

$$= -\frac{x^2 - 4x + 3 + 2y^2}{4xy} = -\frac{2x - 4 + 4y \frac{dy}{dx}}{4y + 4x \frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} \left(4y + 4x \frac{dy}{dx}\right) = -\left(2x - 4 + 4y \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{x-2}{2x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \pm \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - \frac{x-2}{2x}}$$

Voor $x=1, y=0$ krijgt men voor $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

Twee reële raaklijnen, dus een knooppunt.

De vergelijkingen der raaklijnen zijn dus:

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{2} \times (x - 1) \text{ en } y = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \times (x - 1).$$

Dat de kromme een lus heeft, volgt, behalve uit het feit, dat er maar één reële asymptoot is, daaruit dat de kromme voor $x = 4$ $y = 0$ een raaklijn heeft // Y -as en dat voor $x > 4$ geen reële y -s meer gevonden worden.

3. Bepaal de waarde van:

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x \log. x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

Bepalen we eerst de waarde van de onbepaalde integraal

$$\int \frac{x \log. x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = p.$$

Voor $\log. x$ schrijven we $M \ln x$, waarin M is de modulus $\log. e$.

$$p = M \int \frac{x \ln x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = M \times q.$$

Stel $q = \int u dv$, waarin:

$$u = \ln x. \quad dv = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

$$du = \frac{1}{x} dx. \quad v = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$q = uv - \int v du = \ln x \sqrt{x^2 - 1}$$

$$- \int \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1} dx = \ln x. \sqrt{x^2 - 1} - r.$$

$$r = \int \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1} dx.$$

$$\text{Stel } x = \sec \varphi = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

$$dx = \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi.$$

$$r = \int \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \int \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \\ = \int \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi - \int d\varphi = \operatorname{tg} \varphi - \varphi.$$

$$\text{Nu is: } x = \sec \varphi = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{x}.$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \\ = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Dus:

$$r = \sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{bg} \sec x = \sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{bg} \cos \frac{1}{x},$$

waaruit weer:

$$q = \ln x. \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{bg} \cos \frac{1}{x}.$$

Bij invoeren van de grenzen voor: x .

$$\sqrt{2}: \quad q_1 = \ln \sqrt{2} - 1 - \frac{\pi}{4}.$$

$$1: \quad q_2 = 0. \\ q_1 - q_2 = \ln \sqrt{2} - 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Daar $p = Mq$ is, is de gevraagde waarde:

$$M \left(\ln \sqrt{2} - 1 - \frac{\pi}{4} \right) = \log \sqrt{2} - M - M \frac{\pi}{4} \\ = \log \sqrt{2} - \log e - \frac{\pi}{4} \log e. \\ = \log \sqrt{2} - \log e - \log e^{\frac{\pi}{4}} \\ = \log \frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi}{4} + 1}}.$$

ANALYTISCHE MEETKUNDE.

(B. T. M. 1^e groep.)

I. Gevraagd te bepalen de vergelijking van die koorde van de hyperbool $xy = 4$, welke in het punt $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ wordt middendoor gedeeld.

1^e Oplossing.

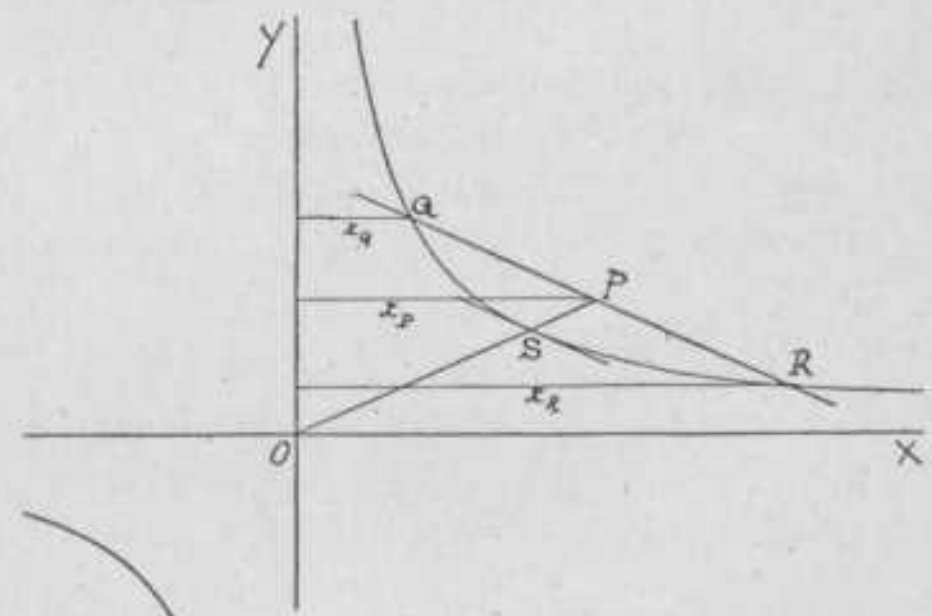
Daar de gevraagde koorde in het punt P wordt middendoor gedeeld, is ze evenwijdig aan de aan OP toegevoegde middellijn in de hyperbool, dus // raaklijn in S .

De richtingscoëfficiënt van die raaklijn is $\frac{dy}{dx}$, te vinden uit:

$$xy = 4$$

$$x \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$



De vergelijking van OP is:

$$\frac{y}{x} = \frac{1 \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2}.$$

waaruit volgt, dat de richtingscoëff. van de raaklijn is $-\frac{1}{2}$, dat ook de richtingscoëfficiënt van de gezochte koorde is.

De vergelijking van de gezochte koorde is dus:

$$\left(y - 1 \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}(x - 3).$$

$$\begin{aligned} 2y - 3 &= -x + 3. \\ x + 2y - 6 &= 0. \end{aligned}$$

2^e Oplossing.

Zij de vergelijking der koorde:

$$\left(y - 1\frac{1}{2}\right) = m(x - 3) \dots (1)$$

De snijpunten met de kromme vindt men door de wortels te zoeken van (1) en $xy = 4$.

Elimineert men bijv. y , door substitutie in (1) van

$$y = \frac{4}{x}, \text{ dan komt er:}$$

$$\left(\frac{4}{x} - 1\frac{1}{2}\right) = m(x - 3)$$

$$4 - 1\frac{1}{2}x = mx(x - 3)$$

$$mx^2 - x\left(3m - 1\frac{1}{2}\right) - 4 = 0.$$

$$x^2 - x\frac{3m - 1\frac{1}{2}}{m} - \frac{4}{m} = 0 \dots (2)$$

Men vindt hieruit twee waarden x_Q en x_R .

Uit de fig. volgt nu, omdat $QP = PR$ is:

$$x_Q + x_R = 2x_P = 6.$$

Zoodat in verband met (2):

$$\frac{3m - 1\frac{1}{2}}{m} = 6.$$

$$3m - 1\frac{1}{2} = 6m.$$

$$3m = -1\frac{1}{2}$$

$$m = -\frac{1}{2},$$

welke uitkomst onmiddellijk leidt tot de gezochte vergelijking.

II. A is een vast punt op de X -as. P is een punt op de Y -as. Door P trekt men een rechte loodrecht op PA ; deze loodlijn snijdt de X -as in B . Op PB bepaalt men een punt C zoo, dat P het midden van BC is.

Gevraagd de m.p. van C , als P de Y -as doorloopt.

Zij de onveranderlijke afstand $OA = a$, de veranderlijke $OP = p$.

De vergelijking van AP is:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{p} = 1.$$

$$y = -\frac{p}{a}x + p.$$

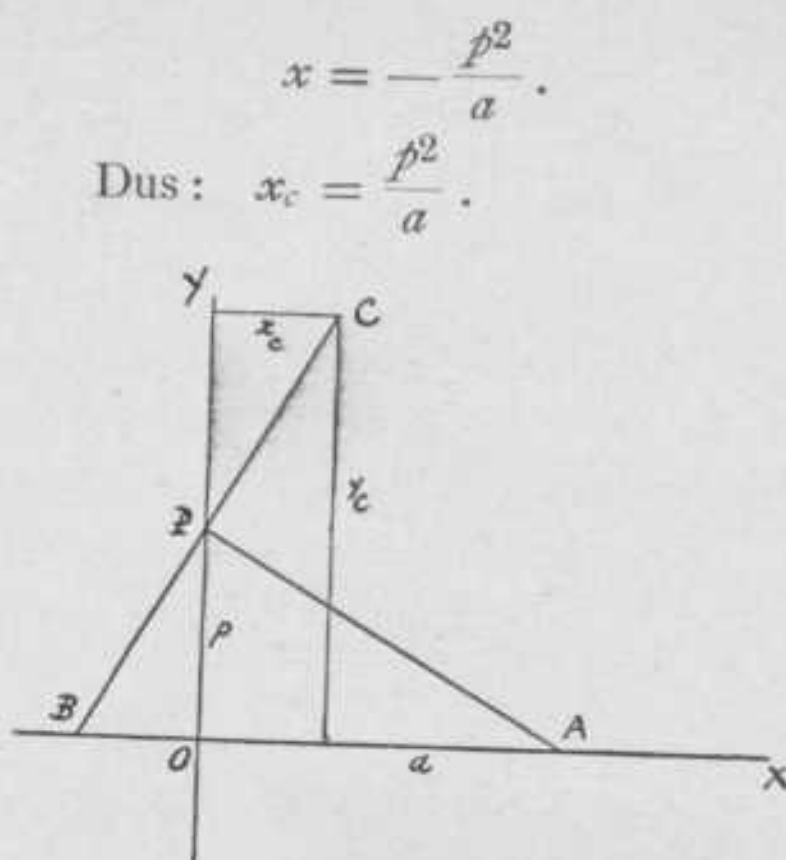
De vergelijking van PB , $\perp AP$, is dus:

$$y = \frac{a}{p}x + p \dots (1)$$

De coördinaten van C zijn:

$$x_c = -OB. \quad y_c = 2 \times OP = 2p.$$

OB is te vinden uit (1) door $y = 0$ te stellen. Men krijgt:



$$x = -\frac{p^2}{a}.$$

Dus: $x_c = \frac{p^2}{a}.$

De coördinaten van C zijn hier uitgedrukt in de veranderlijke p . Door deze te elimineeren krijgt men de vergel. der gevraagde m.p.

$$x = \frac{p^2}{a} \qquad y = 2p$$

$$p = \frac{y}{2}$$

$$x = \frac{y^2}{4a}$$

$$y^2 = 4ax.$$

De meetkundige plaats is dus een parabool met de X -as als reële as en de Y -as als raaklijn.

III. Gegeven twee punten $A(a, 0)$ en $B(0, b)$.

Gevraagd de vergelijking van de gelijkzijdige hyperbool, die door den oorsprong en door a gaat en in A tot kromtecirkel heeft den cirkel, die AB tot middellijn heeft.

De algemeene vergelijking van een kegelsnede is:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

De gevraagde gaat door den oorsprong: $a_{33} = 0$.

Zij gaat door $A(a, 0)$: $a_{11}a^2 + 2a_{13}a + a_{33} = 0$.

Het is een gelijkz. hyperbool: $a_{11} + a_{22} = 0$.

Uit deze 3 voorwaarden volgt:

$$\begin{aligned} a_{33} &= 0, \\ a_{22} &= -a_{11}, \\ 2a_{13} &= -a_{11} \cdot a. \end{aligned}$$

Stellen we nu nog één der coëff. bijv. $a_{11} = 1$, dan krijgen we de vergel. van de kegelsnede:

$$x^2 + 2a_{12}xy - y^2 - ax + 2a_{23}y = 0.$$

De kromtecirkel heeft tot vergelijking:

$$\left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0.$$

Zal deze cirkel kromtecirkel zijn, dan moeten van beide krommen voor punt A de eerste en tweede afgeleide dezelfde zijn.

De waarden dezer afgeleiden vindt men uit de vergelijking van den cirkel:

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0,$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - a - b\frac{dy}{dx} = 0 \dots (1)$$

$$2 + 2y \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - b \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \dots (2)$$

Neemt men in (1): $x = a, y = 0$, dan vindt men

$$2a - a - b \frac{dy}{dx} = 0 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{b}$$

en in (2):

$$x = a, y = 0, \frac{dy}{dx} = \frac{a}{b}$$

$$2 + 2 \frac{a^2}{b^2} - b \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \frac{a^2 + b^2}{b^3}$$

De vergelijking der kegelsnede is:

$$x^2 + 2a_{12}xy - y^2 - ax + 2a_{23}y = 0.$$

Waaruit door differentieeren:

$$2x + 2a_{12}x \frac{dy}{dx} + 2a_{12}y - 2y \frac{dy}{dx} - a + 2a_{23} \frac{dy}{dx} = 0 \dots (3)$$

$$2 + 2a_{12}x \frac{d^2y}{dx^2} + 2a_{12} \frac{dy}{dx} + 2a_{12} \frac{dy}{dx} - 2y \times \times \frac{d^2y}{dx^2} - 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2a_{23} \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \dots (4)$$

Door invoeren van boven gevonden waarden in (3) en (4):

$$2a + 2a_{12}a \times \frac{a}{b} - a + 2a_{23} \cdot \frac{a}{b} = 0 \dots (5)$$

$$2 + 2a_{12} \cdot a \cdot 2 \frac{a^2 + b^2}{b^3} + 2a_{12} \cdot \frac{a}{b} + 2a_{12} \cdot \frac{a}{b} + - 2 \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 2a_{23} \cdot 2 \frac{a^2 + b^2}{b^3} = 0 \dots (6)$$

(5) wordt:

$$2a \cdot a_{12} + 2a_{23} = -b.$$

(6) wordt:

$$2(a^3 + 2ab^2)a_{12} + 2(a^2 + b^2)a_{23} = a^2b - b^3,$$

waaruit:

$$a_{23} = \frac{\begin{vmatrix} 2a & -b \\ 2(a^3 + 2ab^2) & a^2b - b^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a & 2 \\ 2(a^3 + 2ab^2) & 2(a^2 + b^2) \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} \frac{a(a^2b - b^3) + b(a^3 + 2ab^2)}{a(a^2 + b^2) - (a^3 + 2ab^2)} = \frac{1}{2} \frac{2a^3b + ab^3}{-ab^2} = -\frac{1}{2} \frac{2a^2 + b^2}{b}$$

$$a_{12} = \frac{\begin{vmatrix} -b & +2 \\ a^2b - b^3 & 2(a^2 + b^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a & 2 \\ 2(a^3 + 2ab^2) & 2(a^2 + b^2) \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} \frac{-2a^2b}{-ab^2} = \frac{a}{b}$$

De gevraagde vergel. wordt dus:

$$x^2 + 2 \frac{a}{b} xy - y^2 - ax - \frac{2a^2 + b^2}{b} y = 0.$$

$$bx^2 + 2axy - by^2 - abx - (2a^2 + b^2)y = 0.$$

ANALYTISCHE MEETKUNDE.

(B. T. M. 2^e groep).

I. Door het punt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ gaan twee rechten d_1 en d_2 , die respectievelijk tot richtingscoëfficiënten hebben l_1, m_1, n_1 en l_2, m_2, n_2 .

Door het punt P_1 gaat ook de rechte d , die tot richtingscoëfficiënten heeft

$$l_1 + pl_2, \quad m_1 + pm_2, \quad n_1 + pn_2.$$

Bewijs, dat de drie d_1, d_2 en d_3 in één plat vlak liggen, en geeft de vergelijking van dit vlak.

Daar de drie rechten door één punt gaan, zullen ze in één vlak liggen, als aan de voorwaarde voldaan is:

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_1 + pl_2 & m_1 + pm_2 & n_1 + pn_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dat deze determinant de waarde 0 heeft is onmiddellijk te zien.

De vergelijking van het vlak is op de volgende wijze te vinden.

Zij de vergelijking:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Daar de lijnen d_1 en d_2 erin moeten liggen, gelden de voorwaarden:

$$Al_1 + Bm_1 + Cn_1 = 0.$$

$$Al_2 + Bm_2 + Cn_2 = 0.$$

Drukken we hierin A en B in C uit, dan vinden we:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} -Cn_1 & m_1 \\ -Cn_2 & m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_1 & m_2 \\ l_2 & m_1 \end{vmatrix}} = C \frac{m_1n_2 - n_1m_2}{l_1m_2 - l_2m_1}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} l_1 & -Cn_1 \\ l_2 & -Cn_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}} = C \frac{n_1l_2 - n_2l_1}{l_1m_2 - l_2m_1}.$$

De vergelijking van het vlak wordt:

$$(x - x_1) \cdot \frac{m_1n_2 - n_1m_2}{l_1m_2 - l_2m_1} + (y - y_1) \frac{n_1l_2 - n_2l_1}{l_1m_2 - l_2m_1} + (z - z_1) = 0$$

$$(x - x_1)(m_1n_2 - n_1m_2) + (y - y_1)(n_1l_2 - n_2l_1) + (z - z_1)(l_1m_2 - l_2m_1) = 0.$$

II. Gevraagd de vergelijking van den kleinsten bol, die raakt aan de z -as en ook aan de rechte:

$$3x + 4y = 50,$$

$$x = 3z.$$

Het middelpunt van den bol ligt op het midden van de lijn, die de twee lijnen loodrecht snijdt.

Een van die lijnen is de Z -as, dus de vergelijking van de gezochte lijn kan geschreven worden:

$$z = p, \quad y = mx.$$

Deze lijn moet de tweede lijn \perp snijden.

Uit de voorwaarde, dat de twee lijnen elkaar snijden, volgt, dat de vergelijkingen:

$$3x + 4y = 50 \dots (1)$$

$$x = 3z \dots (2)$$

$$y = mx \dots (3)$$

$$z = p \dots (4)$$

een gemeenschappelijke wortel hebben.

Uit (4), (2), (3) en (1) volgt:

$$9p + 12mp = 50 \dots (5)$$

De lijnen moeten \perp elkaar staan, dus de som der producten van de richtingscoëfficiënten moet = 0 zijn.

De vergelijking der gegeven lijn kan geschreven worden:

$$3x = -4y + 50 = 9z,$$

die van de tweede:

$$mx = y, \quad (\text{richtingscoëff. } z = 0).$$

De voorwaarde wordt:

$$\frac{1}{3m} - \frac{1}{4} = 0.$$

$$3m = 4 \dots (6)$$

m en p opgelost uit (5) en (6) geeft:

$$m = \frac{4}{3}.$$

$$9p + 16p = 50.$$

$$p = 2.$$

De vergelijking der gemeenschappelijke loodlijn is:

$$z = 2. \quad 3y = 4x.$$

Snijpunt met de Z -as heeft tot coördinaten:

$$\{0, 0, 2\}.$$

Snijpunt met de geg. lijn heeft tot coördinaten:

$$\{6, 8, 2\}.$$

De coördinaten van het middelpunt van den bol zijn:

$$\{3, 4, 2\}.$$

De afstand der beide snijpunten = middellijn van den bol is gelijk:

$$\sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

De straal van den bol is gelijk 5, dus de vergelijking is:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 25.$$

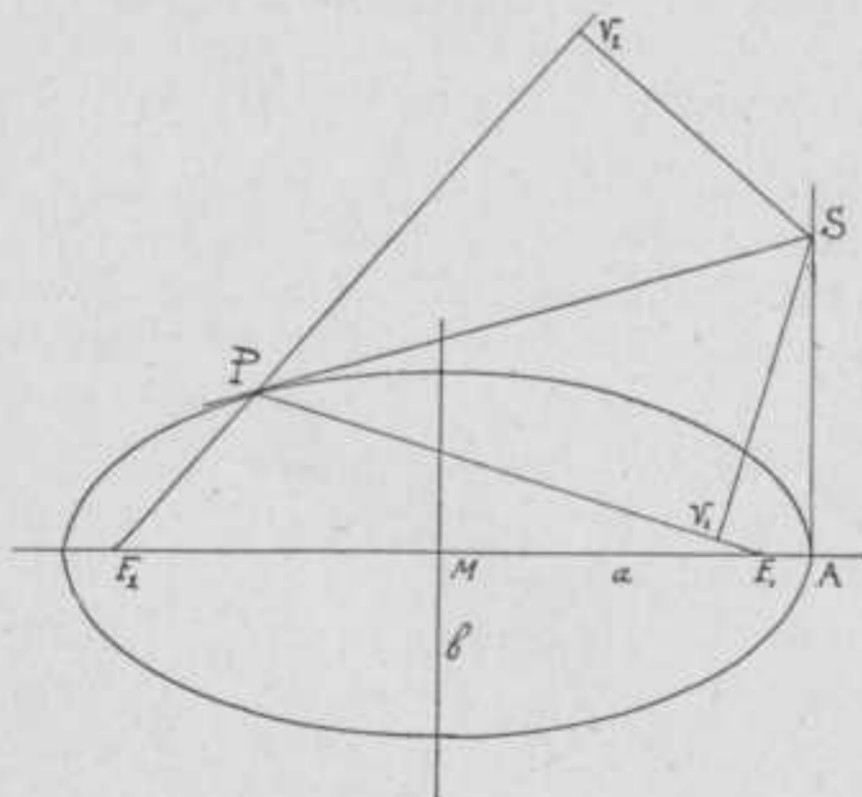
III. Van een ellips zijn F_1 en F_2 de brandpunten en A is een der uiteinden van de groote as. P is een willekeurig punt op de ellips en S is het snijpunt der raaklijnen aan de ellips in de punten A en P . V_1 en V_2 zijn de voetpunten der loodlijnen neergelaten uit S op de brandstralen PF_1 en PF_2 .

Zij de vergelijking der ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Zijn de coördinaten van P :

$x = a \cos a$, *) $y = b \sin a$, dan is de vergelijking der raaklijn PS :

$$\frac{x a \cos a}{a^2} + \frac{y b \sin a}{b^2} = 1.$$



Snijpunt S heeft tot coördinaten:

$$x = a. \quad y = \frac{b}{\sin a} (1 - \cos a) = AS.$$

De vergelijking van PF_1 is, als $MF_1 = \sqrt{a^2 - b^2} = c$ gesteld wordt:

$$\frac{a - a \cos a}{a \cos a - c} = \frac{y - b \sin a}{b \sin a}$$

of herleid:

$$x b \sin a - y (a \cos a - c) - b c \sin a = 0.$$

Normaalvorm:

$$\frac{x b \sin a - y (a \cos a - c) - b c \sin a}{\sqrt{b^2 \sin^2 a + (a \cos a - c)^2}} = 0.$$

Substitueert men hierin voor x en y de coördinaten van S , dan vinden we de lengte SV_1 :

$SV_1 =$

$$\frac{a b \sin a - \frac{b}{\sin a} (a \cos a - c) \times (1 - \cos a) - b c \sin a}{\sqrt{b^2 \sin^2 a + (a \cos a - c)^2}}$$

Voor de herleiding van dezen vorm stel:

$$b = a \cos \varphi, \quad \text{dus } a = \frac{b}{\cos \varphi}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = b \operatorname{tg} \varphi.$$

$SV_1 =$

$$\frac{b^2 \sin a}{\cos \varphi} - \frac{b}{\sin a} \left(\frac{b \cos a}{\cos \varphi} - b \operatorname{tg} \varphi \right) (1 - \cos a) - b^2 \operatorname{tg} \varphi \sin a$$

$$\sqrt{b^2 \sin^2 a + \left(\frac{b \cos a}{\cos \varphi} - b \operatorname{tg} \varphi \right)^2}.$$

$$= b \frac{\frac{\sin a}{\cos \varphi} - \frac{1}{\sin a} \left(\frac{\cos a}{\cos \varphi} - \operatorname{tg} \varphi \right) \times (1 - \cos a) - \operatorname{tg} \varphi \sin a}{\sqrt{\sin^2 a + \left(\frac{\cos a}{\cos \varphi} - \operatorname{tg} \varphi \right)^2}}$$

$$= b \frac{\sin a - \frac{(1 - \cos a)(\cos a - \sin \varphi)}{\sin a} - \sin \varphi \sin a}{\sqrt{\cos^2 \varphi \sin^2 a + (\cos a - \sin \varphi)^2}}.$$

De noemer van deze breuk is te herleiden:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\cos^2 \varphi \sin^2 a + (\cos a - \sin \varphi)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 \varphi \sin^2 a + \cos^2 a + \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos a} \\ &= \sqrt{\cos^2 \varphi \sin^2 a + 1 - \sin^2 a + \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos a} \\ &= \sqrt{(1 - \sin^2 a)(1 - \cos^2 \varphi) + \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos a} \\ &= \sqrt{(1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos a)} \\ &= \sqrt{(1 + \sin^2 \varphi \cos^2 a - 2 \sin \varphi \cos a)} \\ &= 1 - \sin \varphi \cos a. \end{aligned}$$

$$SV_1 = b \frac{\sin a - \frac{(1 - \cos a)(\cos a - \sin \varphi)}{\sin a} - \sin \varphi \sin a}{1 - \sin \varphi \cos a}$$

$$= \frac{b}{\sin a} \frac{\sin^2 a - (1 - \cos a)(\cos a - \sin \varphi) - \sin \varphi \sin^2 a}{1 - \sin \varphi \cos a}$$

$$= \frac{b}{\sin a} \times \frac{\sin^2 a - \cos a + \sin \varphi + \cos^2 a - \cos a \sin \varphi - \sin \varphi \sin^2 a}{1 - \sin \varphi \cos a}$$

$$= \frac{b}{\sin a} \frac{1 - \sin \varphi \cos a - \cos a + \sin \varphi - \sin \varphi \sin^2 a}{1 - \sin \varphi \cos a}$$

$$= \frac{b}{\sin a} (1 - \cos a) = AS \text{ (zie vroeger).}$$

SV_2 wordt evenzoo berekend. Dat $SV_2 = SV_1$ is, is ook te zien uit de congruentie der rechth. driehoeken PSV_1 en PSV_2 .

$\angle V_2 PS = \angle V_1 PS$, omdat de raaklijn in P den buitenhoek van $\triangle PF_1 F_2$ halveert.

A. O. SCHUT.

*) Lees voor $\sin a$ en $\cos a$: $\sin \alpha$ en $\cos \alpha$.

EXAMEN-VRAAGSTUKKEN.

Prop. Examens voor de Zomervacantie 1914.

NATUURKUNDE.

Algemeene cursus, 1^{ste} deel.

1.

Een met water gevulde flesch is gesloten door een stop, waardoor een aan beide zijden open buis gestoken is, die tot in het midden van de flesch reikt. Door een kleine opening in den zijwand van de flesch kan het water uitstroomen in een aanvankelijk horizontaal gericht straal. Deze opening ligt 12 cm lager dan het ondereinde van de buis.

Op welken afstand van de flesch zal de straal een horizontaal vlak treffen, dat 8 cm beneden de opening ligt?

Bewijs de formule voor de uitstrooming.

2.

Beschrijf de methode van Clément en Desormes voor het bepalen van de verhouding van de beide soortelijke warmten van een gas bij constanten druk en bij constant volume, en geef een afleiding van de daarbij gebruikt wordende formules.

Technische Warmteleer.

1.

In een cilinder, afgesloten door een zuiger, bevindt zich 60 liter lucht van 50° C. en 2 atm spanning. De uitwendige drukking op den zuiger wordt plotseling van 2 op 1 atm verminderd. Met welk bedrag is ten slotte, als de zuiger ten gevolge van de wrijving weer is tot rust gekomen, de entropie van het gas veranderd, in de onderstelling, dat de toestandsverandering van het gas adiabatisch geschiedt?

Gegeven: het s.g. van lucht bij 0° C. en 760 mm = 0,001293, $v_p = 0,238$, $e_v = 0,169$, $E = 427$ kgm/kg-cal, 1 atm = 1,0333 kg/cm².

2.

Bewijs, dat voor een enkelvoudige stof, bij toepassing van de toestandsvergelijking van Van der Waals, de volgende betrekking geldt:

$$c_p - c_v = \frac{R}{1 - \frac{2a}{v^3 R T} (v - b)^2},$$

of bij benadering

$$c_p - c_v = R \left(1 + \frac{2a}{v R T} \right),$$

wanneer c_p en c_v voorstellen de soortelijke warmte van de stof, respectievelijk bij constanten druk en bij constant volume; a , b en R zijn de constanten in de vergelijking van Van der Waals en v het soortelijk volume van de stof.

Algemeene cursus, 2^{de} deel. Electriciteit, beknopte cursus.

1.

Twee klemmen A en B , die met een electrisch net in verbinding staan, zoo dat de potentiaal in A V volt hooger is dan in B , zijn onderling verbonden door twee geleidraden ACB en ADB . De punten C en D zijn verbonden door een leiding, waarin een element is opgenomen, met de positieve pool naar C gekeerd, en een galvanometer.

Het blijkt dat deze geen uitslag geeft, als de weerstanden in de takken AC , AD , BC en BD bedragen a , b , c en d ohm. Bereken de electromotorische kracht van het element.

2.

Een draadklosje met 20 windingen is verbonden met een galvanometer en een aardinductor, bestaande uit 200 windingen van 1500 cm² oppervlak, welke horizontaal zijn geplaatst en om een in hun vlak liggende horizontale as kunnen draaien. Het omslaan van den aardinductor over 180° geeft een uitslag van 25 schaaldeelen.

Wordt een magneetstaaf in het klosje gestoken, zoo dat dit het middelste deel van de staaf omvat, dan neemt men een uitslag van 12 schaaldeelen waar. De doorsnede van den magneet is 1,5 cm² en verschilt slechts weinig van die van het klosje. De horizontale intensiteit van het aardmagnetisme is 0,185 gauss, de inclinatie 66° 46'. Bereken de magnetische inductie in het ijzer.

Bijzondere onderwerpen.

1.

Toon aan, hoe men uit de dampdichtheid (Δ) van een stof het molekulair gewicht (M) dier stof kan afleiden.

Geef een overzicht van de methode van Dumas voor de bepaling van de dampdichtheid Δ en bespreek zoo volledig mogelijk de wijze, waarop hierbij uit de verschillende gemeten grootheden de dampdichtheid kan worden berekend.

2.

Een lichtstraal valt in onder een hoek i uit lucht op een grensvlak van een eenassig kristal; het grensvlak is geslepen loodrecht op de optische as.

Bewijs, dat de hoek van breking r_b van den buitengewonen straal gegeven wordt door de betrekking:

$$\operatorname{tg} r_b = \frac{\omega \sin i}{\varepsilon \sqrt{(\varepsilon^2 - \sin^2 i)}}$$

als ω den brekingsindex voor den gewonen straal en ε dien voor den buitengewonen straal voorstelt.

Candidaats-Examen Juni 1914.

Toegepaste Mechanica voor C₁ en B₁.

1. Op een balk van 10 M. lengte kan een wagentje, met raddrukken van 2 T. en 3 T., op afstand 1.50 M., heen en weer rijden.

Wat is het grootste moment, dat daardoor in die balk kan ontstaan?

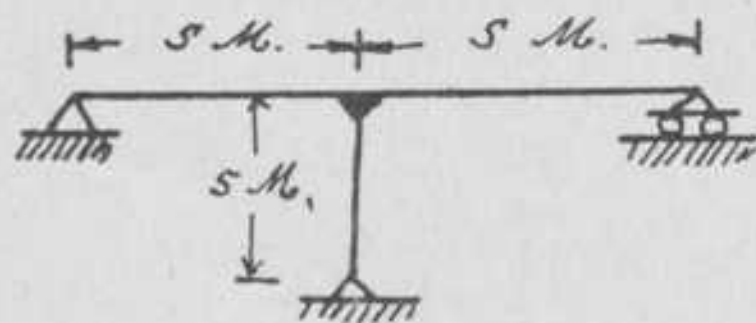
2. Een vloeijzeren staaf, dik 8 c.M., hoog 10 c.M., wordt gebogen; het buigend moment is zoo groot, dat de vloeigrens van het materiaal, $30 \frac{\text{K.G.}}{\text{m.M}^2}$, wordt bereikt, niet alleen in de uiterste punten, maar onder en boven tot op 3 c.M. van het midden af.

Hoe groot is het buigend moment, als de evenredigheid tusschen spanning en vormverandering opgaat tot de vloeigrens toe?



3. Een kolom, bestaande uit twee gekoppelde kanaalijzers N^o. 20, lang 4.50 M., wordt belast door een samendrukkende kracht van 20 T., boven centrisc aangrijpende, en draagt bovendien een last van 3 T., die op 1.50 M. van onder op een afstand van 30 c.M. uit de as aangrijpt. Wat zijn de lijnen der buigende momenten, der dwarskrachten, en der normaalkrachten; wat is de grootste spanning; welke zekerheid tegen knik is aanwezig; als alleen de last van 20 T. werkt? De bevestigingen van onder en boveinde nemen geen momenten op; de doorsnee heeft een oppervlak van $2 \times 32 \text{ c.M}^2$, en een traagheidsmoment van $2 \times 1911 \text{ c.M}^4$. Knik om de vrije as is uitgesloten.

4. Een vakwerklijger met rechten onder- en parabolisch verloopenden bovenrand heeft zeven velden, elk lang 3 M; de hoogte van het middelste veld is 3 M. De diagonalen vallen naar het midden; het middelste veld heeft dubbele diagonalen. Wat zijn de staafkrachten bij belasting van 3 T. per benedenknooppunt; wat, als deze belasting boven aangrijpt; en wat, als alleen de drie linker knooppunten deze belasting dragen?



5. Bovenstaande constructie draagt een gelijkmatig verdeelde belasting van 1 T. per M.; wat zijn de momenten- en de dwarskrachtenlijnen? En wat zijn deze, als alleen de linkerhelft is belast?

Samendrukking en afschuiving kunnen worden verwaarloosd tegenover de buiging; de stijl heeft dezelfde doorsnee als de ligger; deze is aan zijn uiteinden in zijn as opgelegd.

6. Een prismatische boog, met aan beide einden scharnieren, en een parabolisch verloopende as, draagt in het midden een last van 1 T. De overspanning is 10 M., de pijl f is 3 M. Eenvoudigheidshalve kan het verschil tusschen de boogelementen ds en hunne projecties dx worden verwaarloosd.

Wat zijn de scharnierdrukken, als alleen op buiging behoeft te worden gelet? En wat zijn ze, als de boog een gelijkmatig verdeelde belasting van $10 \text{ M.} \times 1 \frac{\text{T}}{\text{M}}$ draagt?

Mechanica, 1^e Gedeelte voor B₁.

1. Bij het neervallen van een heiblok, zwaar 200 K.G., over een hoogte van 5 M., heerscht in het touw een tegenwerkende trekkracht van 50 K.G. Hoe groot is de hoeveelheid arbeidsvermogen, in het blok opgehoopt op het eind van den val?

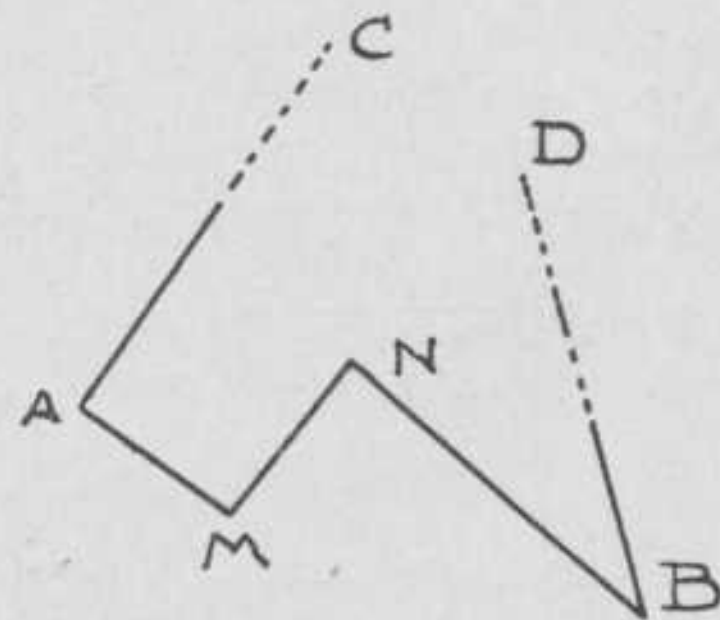
2. Wat is de slingertijd van een stok, lang 1 M., zwaar 3 K.G., die aan de uiteinden bezwaard is met gewichten van 2 K.G. elk, als die stok is opgehangen in een punt op 30 c.M. afstand van het midden?

3. Een bak van gewapend beton, S.G. 2.4, buitenwerks lang 8 M., breed 4 M., en hoog 5 M., heeft een wanddikte van 25 c.M., en een bodemdikte van 30 c.M.; kan die bak, als er bovendien een laag nat zand, S.G. 1.9, van 0.50 M. dikte op den bodem ligt, drijvend worden vervoerd, zonder gevaar voor omslaan?

4. Door de hoofdbuis van een waterleiding, middellijn 0.40 M., stroomt per seconde 80 L.; het drukverlies zou bij nameting blijken te zijn 1.5 c.M. per 100 M. lengte. Hoe groot zou dat drukverlies worden, als per seconde 100 L. werd doorgepompt? En hoe groot was de afvoer, indien op een lengte van 1000 M. een drukverschil van 50 c.M. ontstond?

Landmeten en Waterpassen, C. I. en M. I.

1. De punten A, B, C en D zijn gegeven door hunne rechthoekige coördinaten.



Ter bepaling van de ligging der punten M en N zijn de elementen van de veelhoek AMNB gemeten.

Uit de volgende getallenwaarden de coördinaten van M en N te berekenen volgens de methode der kleinste vierkanten.

Gegeven coördinaten in meters.

	X	Y
A	0,00	0,00
B	+ 910,90	- 314,63
C	+ 442,56	+ 503,17
D	+ 732,86	+ 198,31

Gemeten richtingen en afstanden.

In A:

$$C = 0^{\circ} \quad 0' \quad 0''$$

$$M = 67 \quad 15 \quad 46 \quad 301,44 \text{ Meter.}$$

In M:

$$A = 0^{\circ} \quad 0' \quad 0'' \quad 301,44 \text{ ,,}$$

$$N = 122 \quad 17 \quad 26 \quad 271,15 \text{ ,,}$$

In N:

$$M = 0 \quad 0 \quad 0 \quad 271,15 \text{ ,,}$$

$$B = 262 \quad 19 \quad 36 \quad 568,55 \text{ ,,}$$

In B:

$$N = 0 \quad 0 \quad 0 \quad 568,55 \text{ ,,}$$

$$D = 27 \quad 39 \quad 46$$

2. Verklaar de wijze, waarop de hoek tusschen de twee richtlijnen van een reversie-niveau kan worden bepaald, wanneer zulk een niveau zich bevindt aan een tot dit onderzoek ingericht waterpasinstrument.

Geodesie.

1. Van twee punten van een primair driehoeksnet, A en B, zijn gegeven de rechthoekige coördinaten in stereografische projectie. Een derde punt C is gegeven door den hoek BAC en den afstand AC, beide op het aardoppervlak, dat bolvormig wordt gesteld.

Het punt A valt niet samen met het centrale punt der kaart; geografische coördinaten van A of B zijn niet beschikbaar.

Aan te wijzen op welke manier de rechthoekige coördinaten in de kaart voor het punt C kunnen berekend worden.

De ontwikkeling van de te gebruiken formules wordt uitdrukkelijk verlangd.

2. Voor een punt op het ellipsoidisch aardoppervlak, dat niet op den evenaar of in een der polen is gelegen, aan te toonen, welke de lengten zijn van de hoofdkromtestralen in dat punt.

Toegepaste Mechanica voor W. I. 1914.

Vraag 1, en één der beide vragen 2 en 3 te beantwoorden.

1. Van een vliegwiel, dat 250 omwentelingen per minuut maakt, is gegeven:

$$R = \text{gemiddelde straal van den velg} \quad . \quad . \quad . = 150 \text{ c.M.}$$

$$F = \text{opp. van de dwarsdoorsnede van den velg} = 720 \text{ c.M.}^2$$

$$I = \text{traagheidsmom. van de normale velgdoorsnede t. o. v. de hoofdtraagheidsas van 't zwaartepunt, welke // loopt aan de as van wenteling van het vliegwiel} \quad . \quad . \quad . = 154 \text{ 000 c.M.}^4$$

$$W = \text{weerstandsmom. van de normale velgdoorsnede t. o. v. dezelfde as} \quad . \quad . \quad . = 7 \text{ 000 c.M.}^3$$

$$r = \text{buitenstraal van de naaf} \quad . \quad . \quad . = 40 \text{ c.M.}$$

$$l = \text{lengte der armen} \quad . = 90 \text{ c.M.}$$

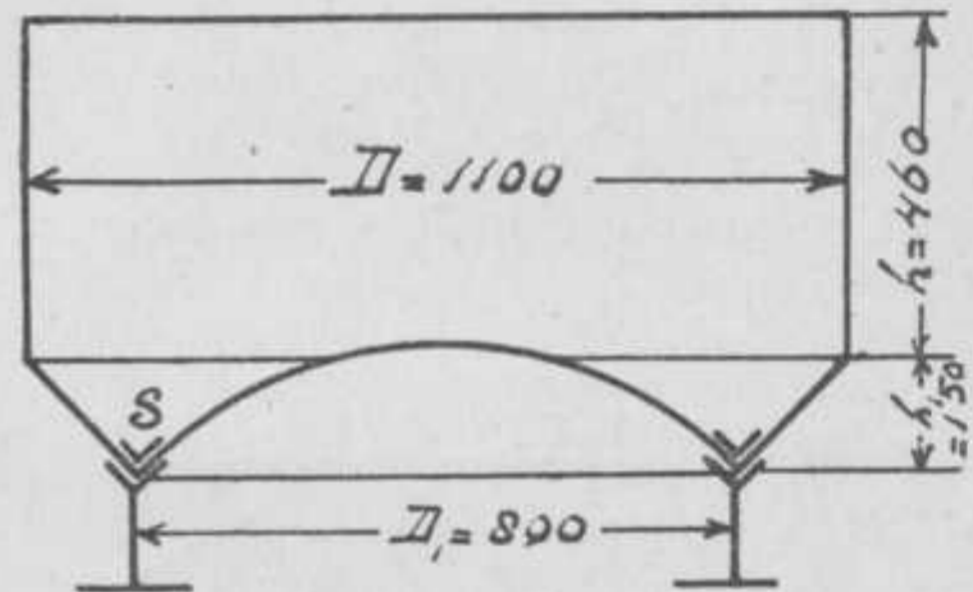
$$n = \text{aantal der spaken} \quad . = 8$$

$$f = \text{opp. der dwarsdoorsnede der spaken} \quad . = 100 \text{ c.M.}^2$$

$$E\text{-ijzer} = \quad . \quad . \quad . = 1 \text{ 000 000 K.G./c.M.}^2$$

$$\gamma = \text{S. G. ijzer} \quad . \quad . \quad . = 7,25$$

Welke spanningen treden in velg en spaken tengevolge van de ronddraaiende beweging op?



2. Van het hierboven in doorsnede geteekende Intze-reservoir, dat een waterinhoud van 500 M.³ heeft, zijn de volgende afmetingen gegeven:

$$D = 1100 \text{ c.M.}, \quad h = 460 \text{ c.M.}, \quad D_1 = 800 \text{ c.M.},$$

$$h_1 = 150 \text{ c.M.}, \quad R_{\text{bol}} = 550 \text{ c.M.}$$

Men vraagt de plaatdikten van de cilinder-, kegel- en bolvormige rompdeelen van dit reservoir te bepalen, *zonder* rekening te houden met den toeslag, die vereischt wordt:

1^o. door de, door het klinkverband veroorzaakte, verzwakking der platen;

2^o. door de intering, waaraan de platen later blootstaan.

3. Gevraagd wordt het vereischte traagheidsmoment te bepalen van den ring S, waarmede het kegel en bolvormige gedeelte van het in vraagstuk 2 gegeven reservoir aan elkaar verbonden zijn.

E. I. 1914.

Vraag 1, en één der beide vragen 2 en 3 te beantwoorden.

1. Zelfde als N^o. 1 W. I.

2. Aan 't ééne uiteinde van een ijzeren, pijpvormigen, 10 M. langen mast, welke in 't andere uiteinde als ingeklemd mag worden beschouwd, zijn 3 leidingen I, II, III bevestigd, welke naar drie even hoog ge-

legen punten loopen, die resp. 30, 40 en 50 M. verwijderd zijn.

De verticale vlakken, waarin de kabels I en II zijn gelegen, sluiten een hoek van 60° , die, waarin de kabels II en III liggen, een hoek van 90° in.

De dikten der leidingen I, II, III zijn 5, 4 en 3 m.M., terwijl de doorhang voor allen 1 M. bedraagt. S. G. koper = 0,9.

Gevraagd wordt aan den mast voldoende afmetingen te geven.

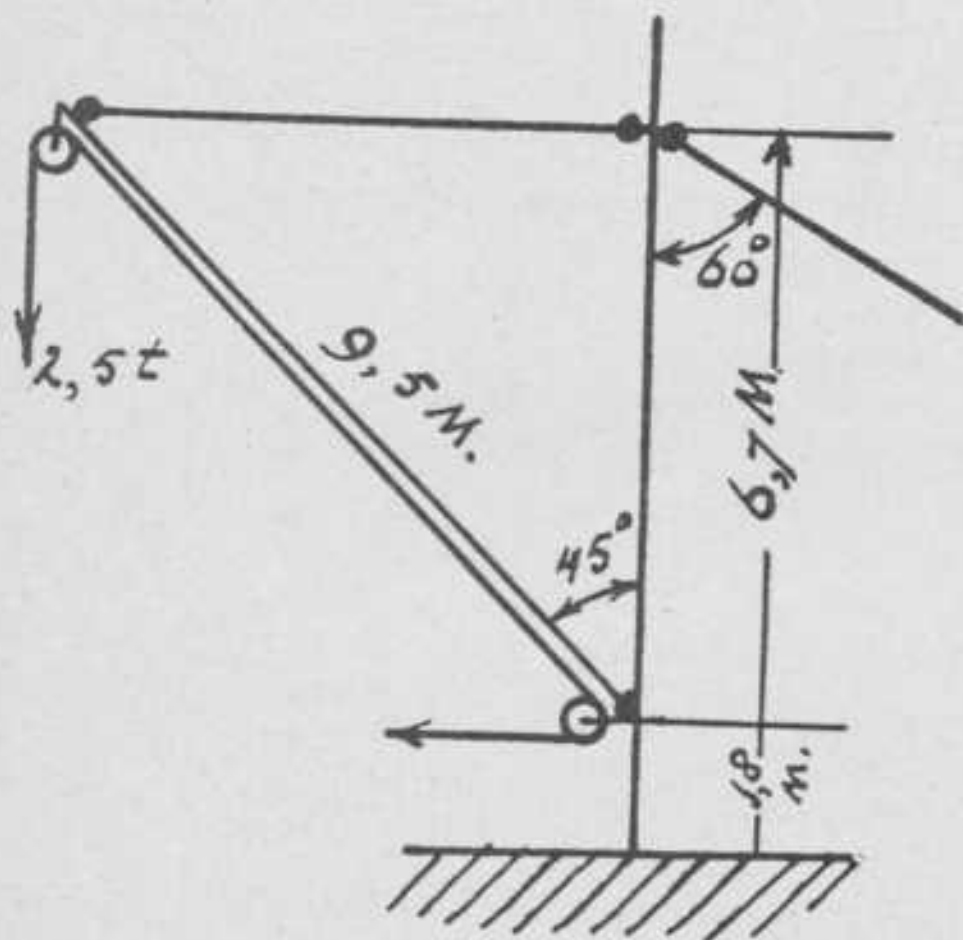
Is het noodig rekening te houden met de mogelijkheid, dat één of twee leidingen breken?

3. Over een vakwerkstaaf, Γ normaalprofiel n^o. 16, lang 3 M., die op knik belast is door een kracht van 3 ton, beweegt zich een laststelsel, bestaande uit twee geconcentreerde lasten, ieder van 1 ton, die een onderlingen afstand van 1,5 M. hebben.

Hoeveel maal zijn de max. doorbuiging en de max. spanning grooter dan de overeenkomstige grootheden voor 't geval, dat de knikkrachten *niet* aanwezig zouden zijn?

S. I. 1914.

Vraag 1, en één der beide vragen 2 en 3 te beantwoorden.



1. Gevraagd wordt een der verticale-]vormige stijlen te berekenen van een waterdicht schot van een vrachtstoomer.

De stijlen mogen in den dubbelen bodem van het schip als ingeklemd, aan 't dek daarentegen, zoowel als bij twee horizontaal aangebrachte dwarsstijlen als opgelegd beschouwd worden.

Lengte der stijlen 750 c.M.

Onderlinge afstand der stijlen = 75 c.M.

Onderlinge afstand der steunpunten = 250 c.M.

2. Een plaatijzeren mast, die in het dek als ingeklemd beschouwd mag worden, heeft een hoogte van 16 M., een gemiddelde buitenmiddellijn van 40 c.M. en een plaatdikte van 8 m.M.

Een laadboom, 9,5 M. lang, welke op een hoogte van 1,8 M. scharnierend aan den mast verbonden is, draagt in zijn uiteinde een last van 2,5 ton, die door

middel van een kabel, welke evenwijdig aan den laadboom loopt, moet worden geheschen.

De onderstagstaaldraad, die op een hoogte van 8,5 M. aan den mast is bevestigd, heeft een middellijn van 18 m.M.

Mast, laadboom, en onderstagstaaldraad liggen in 't zelfde verticale vlak.

Gevraagd wordt de grootste, in den mast optredende, spanning te bepalen.

3. Zie N^o. 3 E. I.

M. I. 1914.

Vraag 1, en één der beide vragen 2 en 3 te beantwoorden.

1. Zie N^o. 3 E. I.

2. Aan 't uiteinde van een houten mast, ter lengte van 10 M., die in 't andere uiteinde als ingeklemd mag worden beschouwd, zijn drie draden I, II, III bevestigd.

De horizontale ontbondenen der trekkrachten, door de draden op den mast uitgeoefend zijn resp. I 50 K.G., II 40 K.G., III 50 K.G.

De verticale vlakken, waarin de draden I en II hangen, maken een hoek van 60° , die waarin II en III hangen een hoek van 90° met elkaar.

Ter hoogte van 6 M. is aan den mast een 3 m.M. dikke bewapeningsdraad bevestigd, welke een hoek van 45° met den grond maakt, en in 't hoekdeelvlak ligt der beide vlakken, waarin I en III hangen.

Gevraagd wordt de middellijn van den mast te bepalen.

Tevens te onderzoeken of rekening dient gehouden te worden met 't geval, dat een of twee draden breken.

3. Toon aan, dat in den velg van een snel ronddraaiend wiel trekspanningen optreden, welke uitsluitend afhangen van de omtreksnelheid van 't wiel en 't S. G. van 't materiaal, waaruit 't wiel is vervaardigd.

De invloed van de spaken op de spanningsverdeling in den velg wordt verwaarloosd.

TECHNISCHE HOOGESCHOOL.

Examens gehouden voor de Zomervacantie

— 1914. —

PROPAEDEUTISCHE EXAMENS.

Geslaagd voor :

Civiel-Ingenieur.

J. Ph. van Dalsum.	G. H. A. Kolff.
W. C. van Goor.	L. Meyer.
A. A. Gnirrep.	H. A. Schijfsma.
G. H. M. Haring.	B. J. Schreur.
C. van Houten.	A. F. de Wolff.

Bouwkundig Ingenieur.

G. J. P. M. Bolsius.	C. B. Posthumes Meijjes.
J. G. C. Franssen.	Mej. M. F. H. Snethlage.

Werktuigkundig Ingenieur.

W. H. Boom.	C. Rodenburg.
G. Th. Bruijn.	W. van Rijswijk.
J. C. G. Grasé.	W. L. van Voorst Vader.
K. de Koning.	D. Vreugdenhil.
J. B. Leeuwenberg.	

Electrotechnisch Ingenieur.

H. Th. Baart de la Faille.	J. C. Milborn.
Ch. A. J. F. Giesberger.	R. de Vries.
H. F. Grondijs.	

Scheikundig Ingenieur.

W. van den Bergh.	Mej. H. J. Kruseman.
E. Bunschoten.	W. van Lookeren
Mej. J. J. J. Dingemans.	Campagne C.Jzn.
H. C. J. H. Gelissen.	W. van Lookeren
G. Goettsch.	Campagne Wzn.
P. van Groningen.	F. Schiff.
L. W. Hansen.	Mej. J. Tromp.
Mej. N. Kloppert.	H. Zanstra.

Mijningenieur.

A. Chr. D. Bothé.	H. C. U. J. Huber.
H. A. D. Gravendeel.	A. A. G. Schieferdecker.
I. R. J. de Greve.	H. J. Schuiling.
G. J. Geursen.	M. P. E. H. Thijwissen.
W. H. Hetzel.	

CANDIDAATS-EXAMEN.

Geslaagd voor:

Mijningenieur.

A. J. R. Cornelissen, (met lof). J. van de Velde.
C. S. van Haften.

INGENIEURS-EXAMEN.

Geslaagd voor:

Scheikundig-Ingenieur.

W. J. Th. Amons.	J. ter Horst.
J. C. van den Berg.	G. M. A. Kayser.
K. Brackmann.	J. Noorduyn.
R. de Brauw.	C. H. M. Oeink.
J. F. Carrière.	M. J. Schoen.
W. A. N. Eggink.	K. H. A. Sillevius.
F. Goudriaan, (met lof).	W. Sturm.
K. N. Hengeveld.	W. H. J. Vethake.

Mijningenieur.

J. W. C. Op den Kamp.

BOEKBESPREKING.

De inhoud van het laatstverschenen nummer *Gewapend Beton*, Maandblad voor Beton en Gewapend Beton, bevat: Broeikassen van gewapend beton. — Rekenlineaal voor gewapend-betonconstructies, syst. Dr. Lewe. — De eigenschappen van portlandcement en ander cement. — Drukvastheid van ongewapende betonprisma's van verschillende hoogte. — Holle betonsteenen. Een nieuwe draadbindtang voor gewapend beton. — Het stofvrijmaken van betonvloeren. — Gewapend beton riolen met klinkers bekleed. — Invloed van de hoeveelheid magnesia in cement. — Cementtransport zonder zakken. — Boekbespreking. — Aangevraagde Octrooien. — Literatuur Overzicht. — Handelsberichten. — Afloop van Aanbestedingen.

—o—

CONTINENTAL HANDBOEK EN ATLAS,
voor Automobilisten en Motorwielrijders.
Uitgaaf: Nederland 1914.

Bladeren we dit handige boekje door, dan valt ons direct de veelzijdige inhoud in het oog. Nuttig voor den automobilist en motorwielrijder, ja zelfs voor den wielrijder, door het groote aantal platte grondjes van steden en de tien kaartjes, te samen van geheel Nederland, op goede schaal en duidelijk af te lezen.

Behalve de verschillende opgaven van de Continental Banden, de behandeling en de uitrusting, geeft het handboek douane-bepalingen, voorschriften, wetten, enz., alles waarmee een motorrijder of automobilist maar in aanraking kan komen.

Voor al het woordenboek van vakuitdrukkingen op automobielgebied zal velen van nut zijn.

G. E.

—o—

A. BODENMÜLLER. SCHIFFSHILFS-
MASCHINEN, DEREN BERECHNUNG
UND KONSTRUKTION. O. Leiner,
Leipzig 1914. — 9 Mk.

Dit werk is een aanvulling van het reeds vroeger bij den zelfden uitgever verschenen boek van Bodenmüller, „Die Schiffsmaschinen”, en zal den scheepsbouwkundigen student uitstekende diensten kunnen bewijzen, bij het ontwerpen van hulpwerktuigen. Waar toch het algemeen gebruikte III^e deel van „Het Scheepsstoomwerktuig” grootendeels beschrijvend is, geeft dit boek meer berekening dezer machines. Jammer echter dat het niet vollediger is! Behoudens de hulpwerktuigen in de machinekamer zijn slechts de stuurinrichting, ankerspelinrichting en bootslieren behandeld. De verschillende soorten laadlieren en kranen, koelmachines, verwarmingstoestellen, pipleiding, ankerlieren, desinfectieapparaten, ventilatieinrichting enz. ontbreken geheel. En ook de besproken onderwerpen zijn verre van volledig. Zoo missen we b.v. bij de stuurmachines die van Wilson & Pirrie, Brown's steamtiller en verscheidene andere bekende machines. Hieruit ziet men dat dit boek geenszins het veel vollediger III^e deel van „Het Scheepsstoomwerktuig” kan vervangen; naast dit werk gebruikt, zal het echter van veel nut zijn. De schrijver toch, chef van de Stettiner „Vulcan”, verklaart de berekeningen op zoo duidelijke wijze, dat zij ook bij gewijzigde constructie een goed inzicht in de berekening zullen geven. Z.

BERICHTEN EN MEDEDEELINGEN.

Propaedeutische Examens na de Zomervacantie

— 1914. —

Zij, die wenschen deel te nemen aan een der propaedeutische examens, genoemd in Art. 8—14 van het Koninklijk Besluit van 4 Juli 1905, Stbl. No. 227, of aan eenig deel dier examens, — zooals deze gedeelten zijn vastgesteld bij beschikking van den Minister van Binnenlandse Zaken van 3 Februari 1908, Afd. H. M. O., — worden uitgenoodigd uiterlijk 27 Juni a.s., van hun voornemen schriftelijk kennis te geven aan den Secretaris der Afdeeling der Algemeene Wetenschappen, Prof. Dr. J. H. Valckenier Kips, (van Leeuwenhoeksingel 23, Delft).

Aangiften, ingekomen na 27 Juni, zullen worden beschouwd als niet ingekomen.

De Candidaten evenwel, die thans examen afleggende, alsnog na 27 Juni bericht ontvangen, dat zij tot na de zomervacantie worden afgewezen, kunnen nog tot en met 4 Juli a.s., hunne aangifte indienen.

Formulieren voor de aanmelding zijn verkrijgbaar in den Technischen Boekhandel van J. Waltman Jr., te Delft.

—o—

Candidaats-Examens na de Zomervacantie 1914.

De voorzitter van de afdeeling der Werktuigbouwkunde, Scheepsbouwkunde en Electrotechniek der Technische Hoogeschool maakt bekend, dat zij, die wenschen deel te nemen aan een der Candidaats-examens, welke door de genoemde afdeeling zullen worden afgenomen na de Zomervacantie 1914, zich hiervoor schriftelijk hebben aan te melden bij den Secretaris dezer afdeeling Professor I. P. de Vooy, w. i. (uitsluitend gebouw W. en S. Nieuwe Laan 76 te Delft) vóór 28 Juni a.s., onder overlegging van het getuigschrift van met goed gevolg afgelegd Propaedeutisch examen.

Formulieren voor de aangifte zijn verkrijgbaar in den Technischen Boekhandel van J. Waltman Jr., te Delft.

—o—

Bij beschikking van den Minister van Binnenlandse Zaken dd. 22 Mei 1914, is voor het tijdvak van 1 Juni tot en met 31 Augustus 1914 benoemd tot assistent voor de werktuigbouwkunde aan de Technische Hoogeschool E. A. Heyse, werktuigkundig ingenieur te Amsterdam.

Bij beschikking van den Minister van Binnenlandse Zaken dd. 29 Mei 1914, is voor het tijdvak van 1 Juni tot en met 31 Augustus 1914 benoemd tot assistent voor de technische hygiëne aan de Technische Hoogeschool J. G. de Voogt, scheikundig ingenieur te Amsterdam.

Bij beschikking van den Minister van Binnenlandse Zaken dd. 30 Mei 1914, is met ingang van 1 Juni 1914 aan A. P. Potma, *c. z.*, op zijn verzoek eervol ontslag verleend als assistent voor de zuivere en toegepaste wiskunde aan de Technische Hoogeschool.

—o—

Bij beschikking van den Minister van Binnenlandse Zaken dd. 30 Mei 1914, is voor het tijdvak van 1 Juni tot en met 31 Augustus 1914 benoemd tot assistent voor de analytische scheikunde aan de Technische Hoogeschool te Delft, J. Noorduy, alhier.

—o—

Bij beschikking van den Minister van Binnenlandse Zaken dd. 30 Mei 1914, is met ingang van 1 Juni 1914, aan A. W. Vervloet, technoloog, op zijn verzoek, eervol ontslag verleend als assistent voor de analytische scheikunde aan de Technische Hoogeschool te Delft.

PRAKTISCH WERKEN IN DE ZOMERVACANTIE.

De redactie stelt gaarne haar kolommen beschikbaar voor verslagen over het praktisch werken, waaraan door studenten gedurende deze Zomervacantie is deelgenomen.

HET EERSTVOLGEND NUMMER
VERSCHIJNT 15 SEPTEMBER.
