TECHNISCH STUDENTEN-TIJDSCHRIFT

HALFMAANDELIJKSCH TIJDSCHRIFT,

ORGAAN VAN DE CENTRALE COMMISSIE VOOR STUDIEBELANGEN.

Abonnementsprijs per jaar f 4,—.

Druk en Administratie Technische Boekhandel en Drukkerij J. WALTMAN JR., Delft.

6e Jaargang. N°. 7. 1 Febr. 1916.

Inhoud.

Beknopt Overzicht van de inrichting en werking van Onderzeebooten,

door J. GESTEL, Officier-Machinist 2e kl., K. N. M.

In de afgeloopen oorlogsmaanden hebben de onderzeebooten (afgezien van het vernietigen van koopvaardijschepen) meermalen bewezen dat de verwachtingen, die men zich bij manoeuvres van dit wapen gevormd had, niet te hoog waren gesteld en dat de onderzeeboot een krachtig wapen is, voor een in oorlogschepen zwakke natie. Anderzijds overdrijve men de waarde van de onderzeebooten niet; het is nog volstrekt niet bewezen dat oorlogschepen en groote kruisers er door overbodig worden, terwijl men op een uitgebreid operatiegebied als b.v. onzen O.I.-Archipel, kleinere snelle kruisers in geen geval zal kunnen missen om door hun veel grootere snelheid verkenningen op grooten afstand te doen; de onderzeebooten te beschermen tegen vijandelijke kleine kruisers, torpedojagers, gewapende koopvaardijschepen e.d. die er in grooten getale tegen worden afgezonden en daarmee de onderzeebooten in de gelegenheid te stellen op te treden tegen de grootere gevechtseenheden.

Voor het uitbreken van den tegenwoordigen oorlog was de opinie over de waarde van onderzeebooten onder deskundigen sterk verdeeld. De Engelsche admiraal Lord Charles Beresford beschouwde ze als onzeewaardig en verwachtte dat ze zonder invloed zouden blijven in den modernen zeeoorlog; zijn collega Sir Percy Scott daarentegen meende dat de onderzeeboot de ondergang van het slagschip zou zijn De eerste is zeer zeker reeds door de feiten gelogenstraft, de opinie van den tweeden is, voorzoover tot nu toe is na te gaan overdreven. Na de eerste successen „Hogue", „Cressy", „Aboukir" enz. heeft men ingezien hoe een schip tegen onderzeeboot-aanvallen te beschermen en het herhaaldelijk bombardeeren van de Belgische kust, zonder dat daarbij door onderzeebootaanvallen schepen verloren gingen, bewijst dat men hierin geslaagd is.

Zooals de naam reeds aangeeft is een onderzeeboot een vaartuig waarmede men onder de oppervlakte van het water kan varen. Daartoe dient het vaartuig met waterdichte luiken gesloten te kunnen worden en sterk genoeg te zijn om weerstand te bieden aan den druk van het water op de diepte waarop zich de boot bevindt (1 K.G. p. cM.^{2} voor elke 10 M. diepte). Het doel van dit varen onder de oppervlakte is, het vijandelijk schip ongezien zoo dicht te naderen, dat met groote trefzekerheid een torpedo gelanceerd kan worden die, tegen de huid ontploffend, daarin onder de waterlijn een gat maakt zoo groot, dat het er door ten onder gaat.

Een lichaam, in een vloeistof geplaatst, ondergaat een opwaartschen druk gelijk aan het gewicht van de verplaatste vloeistof. Wanneer men nu de middelen heeft om een in water drijvende gesloten bus naar willekeur zwaarder te maken, kan men dezen naar believen doen zweven of doen zinken, indien men er maar voor zorgt dat de wanden sterk genoeg zijn om weerstand te bieden aan den druk van het water op de diepte waarop de bus zich bevindt. Ik kan hier reeds nu bijvoegen dat de romp van moderne onderzeebooten zoo sterk geconstrueerd wordt, dat zij naar gelang van hun vorm een druk van 3—6 atm., kunnen weerstaan; zij kunnen dus tot een diepte van 30—60 M. veilig onderduiken.

Bij vroegere pogingen om onder water te varen werd de boot dan ook op de verlangde diepte zwevende gehouden door water van buiten boord naar een tank in de boot te pompen en omgekeerd. Het was echter onmogelijk hiermee op eenzelfde diepte te blijven, immers ging de boot te diep dan werd water uitgepompt tot een opwaartsche beweging verkregen was, maar voordat deze door inpompen van nieuw water gestuit was kwam zij al te hoog zoodat nu weer een te groote hoeveelheid water werd ingepompt enz. Ook de stroomingen van zeewater van verschillende dichtheid aan de kust gaf aanleiding tot moeilijkheden. Bij eb komt het zoete (lichtere) water uit de riviermonden naar buiten, bij vloed trekt het zoute (zwaardere) zeewater naar binnen. Zuiver zoet water weegt 1000 K.G. per M^3., zeewater in de Noordzee 1016 K.G. per M^3., een verschil dus van 16 K.G. per ton waterverplaatsing, wat voor een boot van 500 ton een verschil maakt van 8000 K.G. Nu is weliswaar het verschil nooit zoo groot als dat tusschen zuiver zoet en zout water, maar bij booten die volgens dit systeem (statisch duiken) onder water gingen was een verschil van enkele kilogrammen drijfvermogen reeds voldoende hen te doen rijzen of dalen.

De eerste eenigszins bruikbare onderzeeboot was de Fransche „Gymnote", omstreeks 1886 gebouwd volgens plannen van Gustave Zédé. Daarna werden ook in andere landen bruikbare booten gebouwd, o.a. in Amerika door John P. Holland die sedert 1875 proeven nam en in 1897 de eerste bruikbare boot afleverde.

Alle nieuwere booten vanaf de „Gymnote" duiken met positief drijfvermogen (dynamisch duiken). Wanneer men wil onderduiken laat men zooveel water in de ballasttanks toe, dat eenige honderden liters meer de boot zouden doen zinken, zij behoudt dus maar zoo weinig drijfvermogen dat zij met een geringe kracht onder de oppervlakte gebracht kan worden. Deze kracht wordt opgewekt door de zich achter aan de boot bevindende horizontale roeren. Zoodra de boot door den voortstuwer wordt voortbewogen en men plaatst de horizontale roeren omlaag dan wordt het achterschip omhoog gedrukt; de boot krijgt helling voorover en door de stuwende kracht van de schroef, die in de richting van de lengteas van de boot werkt, vaart ze in schuine richting omlaag. Eenmaal op de gewenschte diepte gekomen kan men door verstellen van het horizontale roer de boot op die diepte houden.[1]) Wil men weer naar de oppervlakte dan wordt het horizontale roer omhoog gesteld, de boot krijgt helling achterover en vaart in schuine richting omhoog. De man die dit regelt (roerganger aan het horizontale of duikroer) ziet daarbij voortdurend op een dieptemeter n.l. een manometer die den druk van het water buiten boord en daarmee de diepte aangeeft waarop de boot zich bevindt.

Bij den dieptemeter bevindt zich ook een hellingmeter (gebogen waterpas) waarop duikroerganger de langsscheepsche helling controleert om deze binnen de voorgeschreven helling te houden.

Een evenwichtsverplaatsing bij onderwatervaart geeft dus een andere helling welke met een grootere uitslag van het duikroer gecompenseerd moet worden. Vooral op kleinere booten moet de bemanning daarom zooveel mogelijk op dezelfde plaats blijven, op groote booten is dit niet zoo noodig, toch moet men zich ook daar zoo weinig mogelijk verplaatsen om den duikroerganger het sturen niet onnoodig te bemoeilijken. Het gewicht van verschoten torpedo's wordt door overpompen van water gecompenseerd. Worden, onder water varend, de electromotoren gestopt, dan houdt de werking van het horizontale roer op en de boot komt vanzelf naar de oppervlakte onder den invloed van het drijfvermogen dat men de boot had laten behouden.

Groote booten die moeilijk met de achterroeren alleen zijn omlaag te krijgen daar het dan te lang duurt voordat de boot voldoende helling heeft en de achterroeren en voortstuwers bij te groote helling boven water konden komen en dan werkeloos worden, heeft men om sneller te kunnen duiken ook vooraan een stel horizontale roeren.

Achter aan de boot bevindt zich ook een vertikaal roer evenals een gewoon schip dat heeft, waarmee op de gewone wijze volgens het compas gestuurd wordt.

Behalve dynamisch kan een moderne boot ook op de boven omschreven wijze statisch duiken, door in- en uitpompen van water als men bijv. in een zeegat den vijand moet afwachten. De bovengenoemde moeilijkheden zijn dan echter geringer omdat de boot niet volkomen zweeft maar nog een gering drijfvermogen over heeft n.l. de waterverplaatsing van het stukje van de periscoop dat boven water uitsteek.

Ook kan men nog zooveel water innemen dat de boot een gering negatief drijfvermogen heeft en op de bodem zinkt mits men daarvoor een plaats uitkiest, die niet dieper is dan de veilige duikdiepte van de boot. Dit kan voorkomen wanneer men achtervolgt wordt om den vijand van het spoor te brengen; wanneer men de energie in de accumulatorenbatterij wil sparen; wanneer de batterij uitgeput is en men door aanwezigheid van vijandelijke vaartuigen niet in de gelegenheid is deze op te laden, wat zooals later blijken zal, altijd aan de oppervlakte moet geschieden, zoodat men in de nabijheid van den vijand daartoe bij voorkeur den nacht afwacht; wanneer men de bemanning rust wil geven en dergelijke gevallen.

De eerste bruikbare onderzeebooten hadden den dubbelpuntigen sigaarvorm die het best tegen druk bestand is en bij onderwatervaart den minsten weerstand biedt. Alle ballasttanks bevinden zich binnen dien drukvasten romp, (fig. 1). Men noemt dit type den zuiveren „sous-marin." Deze vorm heeft het nadeel dat, daar de grootte van de tanks beperkt is, het drijfvermogen bij vaart aan de oppervlakte betrekkelijk gering is; de vorm leent zich slecht voor het bevaren van een woelige zee zoodat het reeds bij betrekkelijk weinig zeegang onmogelijk wordt aan dek te blijven, terwijl door de eigenaardige lijnen de snelheid bij boven water vaart gering is, in verhouding tot het ontwikkeld machinevermogen.

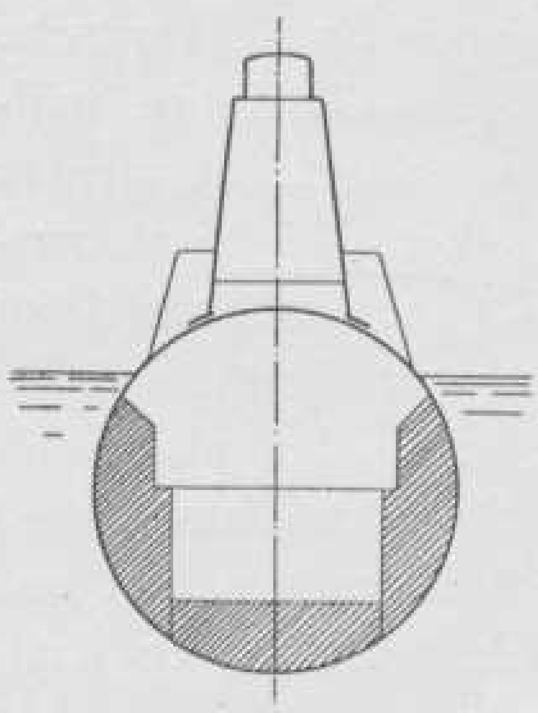


Fig. 1.

In 1895 construeerde de Fransche Marine-ingenieur Laubeuf naar aanleiding van een prijsvraag een onderzeeboot van een geheel nieuw type de „Narwhal." Rond den cilindischen drukvasten romp bouwde hij van lichte staalplaat een tweede, die in vorm veel overeenkomst had met die van een gewone torpedoboot. De ruimte tusschen beide rompen vormt de hoofdballasttank. Voor onder water varen laat men de ruimte

[1]) Wegens de beknoptheid van dit opstel is de wijze van duiken zeer elementair voorgesteld. Voor theoretische beschouwingen daaromtrent verwijs ik naar een verhandeling in de „Schiffbau" XIV Jaargang, „Grundlagen zu einer Dynamik der Unterwasserfahrt" van Dipl. Ing. Marcel Klein; aan het slot waarvan bovendien een uitgebreide opgave voorkomt van op dit gebied verschenen litteratuur.

tusschen binnen- en buitentanks volloopen door kleppen in de buitenhuid; deze kleppen blijven open zoodat de druk binnen en buiten den tank dezelfde blijft en er dus geen druk op de zwakke buitenhuid wordt uitgeoefend (fig. 2). Ter hoogte

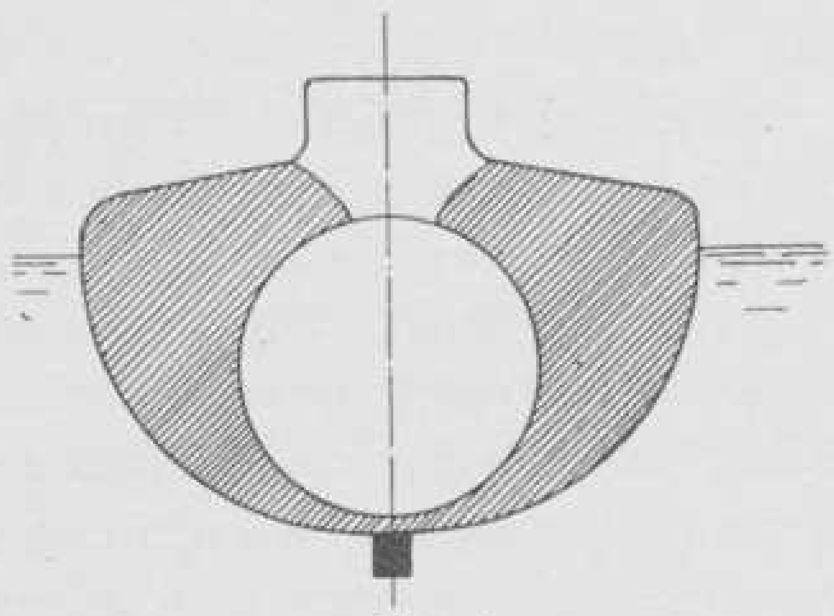


Fig. 2.

van de motoren is de ruimte tusschen binnen- en buitenhuid soms voor brandstofberging ingericht; een opening onder in den tank geeft dan gemeenschap met buitenboord, zoodat ook hier de buitenwand niet belast wordt en daar de brandstof (gasolie) lichter is dan water en dus daarop drijft, kan ze ook niet door de opening verloren gaan. Deze inrichting komt bijv. voor op de Duitsche onderzeebooten, die ook volgens dit dubbelhuidtype geconstrueerd zijn en verklaart dat men in 't begin van den oorlog telkens in de nieuwsbladen kon lezen dat, nadat een onderzeeboot geramd was, zich een olievlek aan de oppervlakte vertoonde. Hieruit blijkt tevens, dat, al bewees die vlek dat de dunne buitenromp beschadigd was, het nog volstrekt niet zeker was, dat ook de drukvaste binnenromp lek gestooten en daarmee, de boot verloren was.

Het ligt voor de hand, dat men voor onderwatervaart een krachtbron noodig heeft, die geen zuurstof gebruikt; de eenige tot nu toe met succes toegepaste is de electromotor, gevoed door stroom uit een accumulatorenbatterij. Proeven met andere energiebronnen als samengeperste lucht, oververhit water en natronloogketels hebben tot nu toe niet voldaan.

Het bezwaar tegen electriciteit is het groote gewicht der batterij en de beperkte capaciteit.

Het aantal cellen wordt zoo gekozen dat een werkspanning van 120 tot 260 Volt verkregen wordt, naar gelang van de grootte der boot. Cellenschakelaars en schakelcellen komen wegens geringe plaatsruimte en beschikbaar gewicht niet voor. Wanneer de spanning gedurende de ontlading der batterij daalt wordt door het uitschakelen van weerstand in het magneetcircuit het magnetisch veld der motoren verzwakt, waardoor de ankerstroom grooter wordt zoodat het door den motor ontwikkeld vermogen constant blijft. De cellen bestaan uit een groot aantal ebonieten bakken, waarin een groot aantal platen met tusschenvoeging van ebonieten afstandstukjes zijn opgehangen. De bakken zijn van boven gesloten door een vastgesmolten ebonieten deksel waardoor de aansluitingsklemmen met behulp van rubberringen zuurdicht zijn heengevoerd en voorzien van een zwaanshals met pijpensluiting om bij lading het ontwikkelde gas af te zuigen benevens een ebonieten schroefdop om het verdund zwavelzuur bij te vullen en de temperatuur van de cel te meten.

De electromotoren zijn zoo licht mogelijk geconstrueerd en wegens de geringe beschikbare hoogte hebben de ankers een kleinen diameter en groote lengte.

De eerste bruikbare onderzeebooten „Gymnote", „Gustave Zédé" e.a. hadden voor voortstuwing alleen een accumulatorenbatterij met electromotor die zoowel voor boven- als onderwatervaart dienst deed. Daardoor hadden die booten een geringe werkingsfeer, konden zich niet ver van hunne basis verwijderen waar zij telkens moesten terugkeeren om hun batterijen opnieuw te laden van stations aan den wal.

Men heeft daarom de latere booten voorzien van een dubbele wijze van voortstuwing, electriciteit voor onder water en een motor of stoommachine voor boven water. Vroeger werden vrij algemeen benzinemotoren toegepast die het voordeel hebben betrekkelijk licht te zijn; het nadeel echter dat bij de minste lekkage zich giftige ontplofbare gassen in de boot ontwikkelen, die een groot gevaar voor de bemanning opleveren. Daar deze gassen vrijwel reukeloos zijn had men vroeger op de Engelsche onderzeebooten een kooi met witte muizen aan boord, omdat deze diertjes door onrustig worden of flauwvallen de aanwezigheid van giftig gas verrieden lang voordat de lucht schadelijk was voor de bemanning.

Stoom als drijfkracht boven water heeft het nadeel dat de installatie zwaarder is en het heete water in de ketels bij onderwatervaart de temperatuur in de boot onaangenaam hoog maakt. Toch heeft de Fransche Marine vele onderzeebooten zelfs van het nieuwste type die boven water door stoom worden voortbewogen omdat de stoommachine betrouwbaarder is dan een motor en de nieuwste booten zoo groot zijn en een zoo groote bovenwatersnelheid hebben dat gedurende hun bouw de industrie nog niet in staat was motoren te leveren van de gewenschte capaciteit, zelfs niet bij toepassing van twee schroeven. Bij deze nieuwere booten worden inplaats van zuiger-machines stoomturbines toegepast. De benoodigde stoom wordt dan geleverd door lichte waterpijpketels die met vloeibare brandstof gestookt worden. Deze brandstof geeft voor eenzelfde gewicht grooter warmteontwikkeling dan steenkolen, dus grooter actieradius; laat zich gemakkelijker in tanks van dikwijls grilligen vorm bergen; het gewicht der verbruikte brandstof is gemakkelijk te compenseeren terwijl bij plotseling gereedmaken voor onderwatervaart de brandstoftoevoer wordt afgesloten waardoor ook direct de stoomtoevoer ophoudt wat bij steenkolen niet het geval is. Voor onderwatervaart wordt de schoorsteen weggenomen en de opening met een deksel waterdicht gesloten; ook de opening aan de vuurzijde wordt gesloten zoodat geen gassen in de boot kunnen ontwijken.

De benzinemotor is wegens het explosiegevaar vervangen door den petroleummotor, en deze weer door den Dieselmotor wegens zijn zuiniger brandstofverbruik. Vrijwel alle moderne onderzeebooten zijn dan ook van deze motoren voorzien, en vele fabrieken hebben zich toegelegd op de vervaardiging van deze lichte snelloopende motoren. Ik zal hier slechts in 't kort de verschillen tusschen de meest bekende fabrikaten aangeven. Om voor plaatsing in een onderzeeboot geschikt te zijn, moeten de motoren in de eerste plaats zoo licht en zoo laag mogelijk gebouwd zijn, waaruit de noodzakelijkheid voortvloeit, den slag kort te houden en daarmee het aantal omwentelingen hoog te nemen. Dit aantal omwentelingen bedraagt bij de meest voorkomende motoren 450—500 per min. en het is duidelijk dat voor een dergelijk hoog aantal omwentelingen de verschillende onderdeelen uiterst zorgvuldig afgewerkt en gesteld moeten zijn. Bij een motor die b.v. 500 omwentelingen doet en over een hoek van 35° van de omwenteling brandstof inspuit, is voor die inspuiting $\frac{60}{500} \times \frac{35}{360}$ $= 0.0117$ secunde beschikbaar.

De meeste onderzeebootmotoren worden met samengeperste lucht aangezet en zijn direct omkeerbaar. *(Wordt vervolgd).*

Eenige toepassingen der Vectoranalyse.

(Vervolg).

Het quaternionisch product.

Het quaternionische product van twee vectoren, waaruit de andere producten der vectoranalyse kunnen worden afgeleid, kan zelf worden afgeleid door toepassing van het invariantieprincipe. Men vermenigvuldigt twee vectoren met elkaar, d.w.z. verbindt ze op een wijze, die distributief is ten opzichte van de optelling, en stelt dan als eisch, dat het product invariant moet zijn ten opzichte van draaiingen van het assenstelsel, en dat het geen grootheden van hoogere orde dan een vector mag bevatten. Hieruit volgen dan de wetten der quaternionische vermenigvuldiging, en het blijkt, dat alle wetten der gewone algebraïsche vermenigvuldiging geldig zijn behalve de commutatieve.

Voeren we als symbool der quaternionische vermenigvuldiging het teeken $\underset{\cdot}{\times}$ in, dan is het verband tusschen quaternionische, skalaire, en vectorische vermenigvuldiging gegeven door de vergelijkingen

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{b} + \mathbf{b} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{a}}{2}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{b} - \mathbf{b} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{a}}{2}$$

of:

$$\mathbf{a} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$
$$= - a_m\, b_m \cos\varphi + \mathbf{c}_l\, a_m\, b_m \sin\varphi$$

waarin $\mathbf{c}_l$ een eenheidsvector, $\perp$ op het vlak van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ en in een richting toegevoegd aan de draairichting van $\mathbf{a}$ naar $\mathbf{b}$, en φ de hoek tusschen $\bar{\mathbf{a}}$ en $\mathbf{b}$.

Het quaternionische product is dus de som van een skalair en een vectorisch product, waaruit volgt, dat het bestaat uit een commutatief en anticommutatief gedeelte. Het produkt $\underset{\cdot}{\times}$ zelf is zoomin commutatief als anticommutatief, want:

$$\mathbf{b} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{a}$$
$$= - a_m\, b_m \cos\varphi - \mathbf{c}_l\, a_m\, b_m \sin\varphi.$$

Het resultaat van de vermenigvuldiging $\mathbf{a} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{b}$ heet een quaternion, en we stellen een dergelijke grootheid voor door een vetgedrukten Griekschen letter:

$$\bar{\alpha} = \alpha_0 + \alpha_1\, \mathbf{i}_1 + \alpha_2\, \mathbf{i}_2 + \alpha_3\, \mathbf{i}_3. \quad ^{1)}$$

1) Daar de vetgedrukte Grieksche letters niet voorhanden waren is hier overal een letter met streep er boven gebruikt, evenals dit in schrift gebruikelijk is.

Een quaternion heeft dus 4 kentallen (vandaar de naam).

$\alpha_0 =$ skalair deel.

$\alpha_1 \mathbf{i}_1 + \alpha_2 \mathbf{i}_2 + \alpha_3 \mathbf{i}_3 =$ vectorisch deel.

$\overline{\alpha}_m = \alpha_m = \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} =$ modulus of absolute waarde.

De quaternion $\frac{\overline{\alpha}}{\alpha_m}$ heeft tot modulus:

$$\sqrt{\frac{\alpha_0^2}{\alpha_m^2} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_m^2} + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_m^2} + \frac{\alpha_3^2}{\alpha_m^2}} = 1,$$

en heet de eenheidsqaternion of versor van $\overline{\alpha}, \overline{\alpha}_I$. Bijgevolg is

$$\overline{\alpha} = \alpha_m \overline{\alpha}_I.$$

Worden van een quaternion α_1, α_2 en α_3 nul, dan reduceert zij zich tot een skalar, de modulus wordt dan deze skalar zelf, wordt daarentegen α_0 nul, dan reduceert zij zich tot een vector en de modulus wordt

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

dat is dus de modulus of lengte van den vector. Een versor gaat op deze wijze over in een eenheidsvector.

Het quaternionische product van twee vectoren kan niet nul zijn, indien niet een der factoren nul is. Hieruit volgt, dat er een eenduidige quaternionische deeling bestaat.

Quaternionische deeling.

Hierbij doen zich twee mogelijkheden voor, n.l.

$$\frac{\mathbf{b}}{\dot{\times}\, \mathbf{a}} = \overline{\gamma} \quad \text{d.w.z.} \quad \overline{\gamma} \dot{\times} \mathbf{a} = \mathbf{b},$$

een quotient van de *eerste soort*, en

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}\, \dot{\times}} = \overline{\delta} \quad \text{d.w.z.} \quad \mathbf{a} \dot{\times} \overline{\delta} = \mathbf{b},$$

een quotient van de *tweede soort*.

Om de waarde van $\overline{\gamma}$ te vinden gaan we beide leden der tweede vergelijking quaternionisch vermenigvuldigen met $\mathbf{a}$:

$$(\overline{\gamma} \dot{\times} \mathbf{a}) \dot{\times} \mathbf{a} = \mathbf{b} \dot{\times} \mathbf{a}.$$

Gebruikmaking van de associatieve wet leert:

$$\overline{\gamma} \dot{\times} (\mathbf{a} \dot{\times} \mathbf{a}) = \mathbf{b} \dot{\times} \mathbf{a}.$$

Daar echter:

$$\mathbf{a} \dot{\times} \mathbf{a} = \mathbf{a} \,.\, \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{a} = - a_m^2$$

is:

$$\overline{\gamma} \dot{\times} (-a_m^2) = \mathbf{b} \dot{\times} \mathbf{a}$$

of, daar de quaternionische vermenigvuldiging van een gewonen skalar gelijk staat met de skalaire:

$$-a_m^2 \overline{\gamma} = \mathbf{b} \dot{\times} \mathbf{a},$$

waaruit volgt:

$$\overline{\gamma} = \frac{\mathbf{b} \dot{\times} \mathbf{a}}{-a_m^2} =$$

$$= \frac{-a_m b_m \cos\varphi - \mathbf{c}_I a_m b_m \sin\varphi}{-a_m^2}$$

$$= \frac{b_m}{a_m} (\cos\varphi + \mathbf{c}_I \sin\varphi),$$

waar φ de hoek is tusschen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$, en $\mathbf{c}_I$ de reeds boven gedefinieerde eenheidsvector.

$\overline{\gamma}$ blijkt te bestaan uit een skalar en een vector, en is dus een quaternion.

De modulus van $(\cos\varphi + \mathbf{c}_I \sin\varphi)$ is 1, zoodat deze grootheid de versor en $\frac{b_m}{a_m}$ de modulus van $\overline{\gamma}$ is.

Een versor, in dit geval $\overline{\gamma}_I$, is dus gegeven door: *een as*, in richting bepaald door zijn eenheidsvector, (hier $\mathbf{c}_I$),
een vlak, $\perp$ hierop, en
een hoek (hier φ).

Een quaternion heeft bovendien nog een getalfaktor, zijn modulus.

Vermenigvuldigen we een vector $\mathbf{a}$, in het vlak van $\overline{\gamma}$ gelegen, quaternionisch met de quaternion $\overline{\gamma}_I$, dan is het resultaat dus, als boven afgeleid, een vector $\mathbf{b}$, eveneens in het vlak van $\overline{\gamma}$ gelegen, die een hoek φ maakt met $\mathbf{a}$, terwijl $\frac{b_m}{a_m} = \gamma_m$. Een quaternion met $\dot{\times}$ is dus voor alle vectoren in haar vlak een draaioperator over een hoek gelijk aan de hoek van de quaternion, die tegelijk die vectoren vergroot in reden van haar modulus tot één. Voor een versor is de modulus 1, zoodat een versor met $\dot{\times}$ voor alle vectoren in zijn vlak een zuivere draaiings operator is over een hoek gelijk aan de hoek van den versor.

Gaan we nu het resultaat na van de quaternionische vermenigvuldiging van een versor $\overline{\gamma}_I$ met een vector buiten zijn vlak bijv. $\mathbf{c}_I$, $\perp$ op het vlak van $\overline{\gamma}_I$:

$$\overline{\gamma}_I \dot{\times} \mathbf{c}_I = (\cos\varphi + \mathbf{c}_I \sin\varphi) \dot{\times} \mathbf{c}_I$$

dan volgt, bij toepassing der distributieve wet:

$$\overline{\gamma}_I \dot{\times} \mathbf{c}_I = \mathbf{c}_I \cos\varphi - (\mathbf{c}_{Im})^2 \sin\varphi$$
$$= \mathbf{c}_I \cos\varphi - \sin\varphi.$$

Het resultaat is dus geen vector meer, maar een quaternion, want $-\sin\varphi$ is een skalar en

$\mathbf{c}_I \cos\varphi$ een vector. Een vector buiten het vlak van een versor wordt dus door quaternionische vermenigvuldiging met dien versor omgezet in een quaternion. Hetzelfde geldt blijkbaar voor vermenigvuldiging met een quaternion, daar een quaternion zich van een versor alleen door een toetredenden getalfaktor, den modulus, onderscheidt.

Meetkundig kan een versor worden opgevat als een hoek met draairichting. Een quaternion heeft behalve een as, een vlak en een hoek, nog een modulus $\neq 1$, en is dus meetkundig op te vatten als een hoek met draairichting en getalfaktor. Ontbreekt het skalaire deel, dan is de hoek $\frac{\pi}{2}$. Een eenheidsvector stelt dus meetkundig ook een rechte hoek met draairichting voor, een algemeene vector een rechte hoek met draairichting en getalfaktor, de modulus.

Resumeerende kunnen we dus opmerken dat een grootheid in $\mathbf{i}$, dus een vector, voor kan stellen:

een lijn met lengte en richting,
een oppervlak met grootte en draairichting, en
een rechte hoek met getalfaktor en draairichting.

Geconjugeerde quaternionen.

We hadden al:

$$\overline{\gamma} = \frac{\mathbf{b}}{\dot{\times}\,\mathbf{a}} = \frac{b_m}{a_m}(\cos\varphi + \mathbf{c}_I \sin\varphi).$$

Werken we op dezelfde wijze het quotient van de tweede soort $\overline{\delta} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}\,\dot{\times}}$ uit, dan blijkt:

$$\overline{\delta} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}\,\dot{\times}} = \frac{b_m}{a_m}(\cos\varphi - \mathbf{c}_I \sin\varphi).$$

Men noemt nu $\overline{\delta}$ de geconjugeerde quaternion van $\overline{\gamma}$ en schrijft:

$$\overline{\gamma} = \overline{\delta}_k \quad \text{en} \quad \overline{\delta} = \overline{\gamma}_k.$$

Er kan bewezen worden, dat:

$$\overline{\gamma} \dot{\times} \overline{\gamma}_k = \left(\frac{b_m}{a_m}\right)^2 = \gamma_m{}^2$$

want:

$$\overline{\gamma} \dot{\times} \overline{\gamma}_k = \frac{b_m{}^2}{a_m{}^2}(\cos\varphi + \mathbf{c}_I \sin\varphi) \dot{\times} (\cos\varphi - \mathbf{c}_I \sin\varphi)$$

$$= \frac{b_m{}^2}{a_m{}^2}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \left(\frac{b_m}{a_m}\right)^2 = \gamma_m{}^2.$$

Hieruit volgt, dat voor versoren, waarvan de modulus immers 1 is, de volgende eigenschap geldt:

$$\overline{\gamma}_I \dot{\times} \overline{\gamma}_{Ik} = \overline{\gamma}_{Ik} \dot{\times} \overline{\gamma}_I = 1$$

en dus

$$\overline{\gamma} = \frac{1}{\overline{\gamma}_{Ik}} = \overline{\gamma}_{Ik}^{\,-1}$$

Toepassing op eigenschappen van den boldriehoek

Gegeven zijn drie eenheidsvectoren $\mathbf{a}'\,\mathbf{b}'\,\mathbf{c}'$ ($_I$ is voor het gemak weggelaten, omdat we alleen met eenheidsvectoren zullen werken). Als de vectoren uitgaan van eenzelfde punt M, dan liggen de uiteinden op een bol met een straal van de eenheid van lengte.

Aangezien de vectoren even lang zijn, zijn hunne quotienten versoren. Noem deze:

$$\frac{\mathbf{c}'}{\dot{\times}\,\mathbf{b}'} = \overline{\alpha}, \qquad \frac{\mathbf{a}'}{\dot{\times}\,\mathbf{c}'} = \overline{\beta}, \qquad \frac{\mathbf{b}'}{\dot{\times}\,\mathbf{a}'} = \overline{\gamma},$$

dan is, als boven afgeleid:

$$\overline{\alpha} = -\,\mathbf{c}' \dot{\times} \mathbf{b}' = \cos\alpha + \mathbf{a}\sin\alpha$$
$$\overline{\beta} = -\,\mathbf{a}' \dot{\times} \mathbf{c}' = \cos\beta + \mathbf{b}\sin\beta$$
$$\overline{\gamma} = -\,\mathbf{b}' \dot{\times} \mathbf{a}' = \cos\gamma + \mathbf{c}\sin\gamma$$

waarin α de hoek tusschen $\mathbf{b}'$ en $\mathbf{c}'$ en $\mathbf{a}$ een eenheidsvector, $\perp$ op het vlak $\mathbf{b}'\,\mathbf{c}'$, en toegevoegd aan de draairichting van $\mathbf{b}'$ naar $\mathbf{c}'$, enz. Bij deze afleiding is in het oog te houden, dat de modulus van $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ en $\mathbf{c}'$ gelijk 1 is. De drie versoren $\overline{\alpha}$ $\overline{\beta}$ $\overline{\gamma}$ zijn meetkundig voor te stellen door de van een richting voorziene zijden van den boldriehoek $\mathbf{a}'\,\mathbf{b}'\,\mathbf{c}'$ (zie fig. 2).

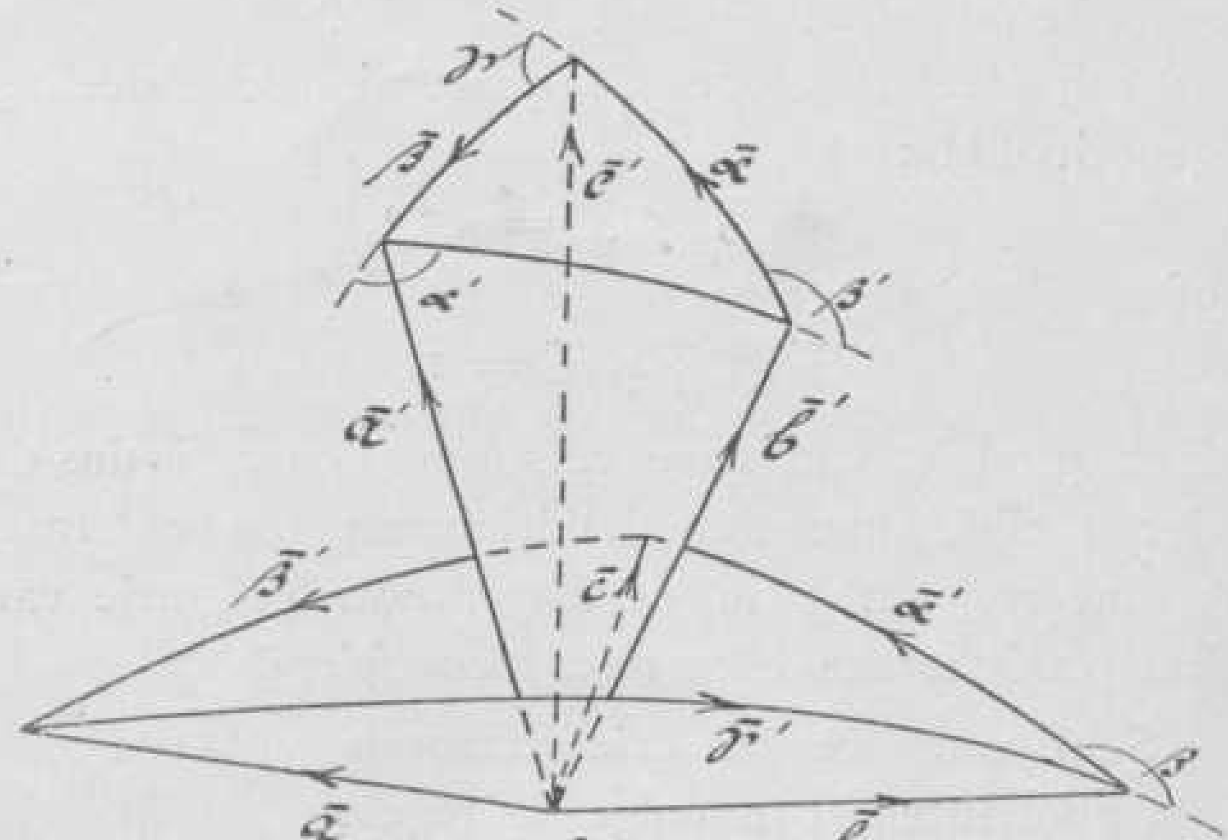


Fig. 2.

De eenheidsvectoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$ vormen zelf weer een driehoek op den bol, die de *pooldriehoek* is van den eersten. Vormen we de versoren

$$\frac{\mathbf{c}}{\dot{\times}\,\mathbf{b}} = \overline{\alpha}', \qquad \frac{\mathbf{a}}{\dot{\times}\,\mathbf{c}} = \overline{\beta}', \qquad \frac{\mathbf{b}}{\dot{\times}\,\mathbf{a}} = \overline{\gamma}',$$

dan is het duidelijk, dat de eenheidsvectoren, die in de uitdrukking dezer versoren zullen voorkomen, daar zij $\perp$ moeten staan op de vlakken $\mathbf{bc}$, resp. $\mathbf{ca}$, resp. $\mathbf{ab}$, identiek zijn met de vectoren $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ en $\mathbf{c}'$ van den eersten boldriehoek.

Bijgevolg is:

$$\overline{\alpha}' = -\,\mathbf{c} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{b} = \cos\alpha' + \mathbf{a}' \sin\alpha'$$
$$\overline{\beta}' = -\,\mathbf{a} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{c} = \cos\beta' + \mathbf{b}' \sin\beta'$$
$$\overline{\gamma}' = -\,\mathbf{b} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{a} = \cos\gamma' + \mathbf{c}' \sin\gamma'$$

waarin α' de hoek is tusschen $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$, enz.

Daar verder de hoek tusschen $\mathbf{b}'$ en $\mathbf{c}'$ dezelfde is als die tusschen de op deze vectoren loodrechte vlakken $\mathbf{ca}$ en $\mathbf{ab}$, enz., en hetzelfde geldt voor $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$ en de vlakken $\mathbf{c'a'}$ en $\mathbf{a'b'}$, enz., zijn de hoeken α, β en γ resp. α', β' en γ' de buitenhoeken in den tweeden resp. eersten boldriehoek.

Er bestaat dus tusschen de beide boldriehoeken *volledige* reciprociteit, d.w z. alles wat van den eersten geldt t. o. van den tweeden, geldt omgekeerd van den tweeden t. o. van den eersten.

Uit de gevonden formules volgen eenige eigenschappen van vermenigvuldiging en deeling van versoren. Zoo volgt uit:

$$\overline{\alpha} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{b}' = \mathbf{c}'$$
$$\overline{\beta} \underset{\cdot}{\times} \overline{\alpha} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{b}' = \mathbf{a}'$$

en:

$$\overline{\gamma} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{a}' = \mathbf{b}'$$
$$\overline{\gamma}^{-1} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{b}' = \mathbf{a}'$$

dat:

$$\overline{\beta} \underset{\cdot}{\times} \overline{\alpha} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{b}' = \overline{\gamma}^{-1} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{b}'$$

of, bij deeling door $\mathbf{b}'$ (quaternionische deeling geoorloofd!):

$$\overline{\beta} \underset{\cdot}{\times} \overline{\alpha} = \overline{\gamma}^{-1}$$

of

$$\overline{\gamma} \underset{\cdot}{\times} \overline{\beta} \underset{\cdot}{\times} \overline{\alpha} = 1.$$

Het produkt van twee versoren $\overline{\beta}$ en $\overline{\alpha}$ is dus de derde zijde van den boldriehoek, die ontstaat, wanneer $\overline{\beta}$ en $\overline{\alpha}$ in de *omgekeerde* volgorde van het produkt aan elkaar worden gelegd.

Schrijven we de drie versoren $\overline{\beta}$, $\overline{\alpha}$ en $\overline{\gamma}^{-1}$ als quotiënten, dan volgt de regel:

$$\frac{\mathbf{a}'}{\underset{\cdot}{\times}\,\mathbf{c}'} \underset{\cdot}{\times} \frac{\mathbf{c}'}{\underset{\cdot}{\times}\,\mathbf{b}'} = \frac{\mathbf{a}'}{\underset{\cdot}{\times}\,\mathbf{b}'}$$

en evenzoo is af te leiden:

$$\frac{\mathbf{c}'}{\mathbf{b}'\underset{\cdot}{\times}} \underset{\cdot}{\times} \frac{\mathbf{a}'}{\mathbf{c}'\underset{\cdot}{\times}} = \frac{\mathbf{a}'}{\mathbf{b}'\underset{\cdot}{\times}},$$

of, in woorden:

Is in een produkt van twee eenvoudige quotienten van de eerste (tweede) soort van vectoren de noemer van den *eersten (tweeden)* factor gelijk aan den teller van den *tweeden (eersten)* (niet omgekeerd!) dan mogen bij de vermenigvuldiging de gelijke vectoren tegen elkaar worden weggeschrapt.

De regel geldt ook voor eenvoudige quotiënten van quatermionen:

$$\frac{\overline{\delta}}{\underset{\cdot}{\times}\,\overline{\eta}} \underset{\cdot}{\times} \frac{\overline{\eta}}{\underset{\cdot}{\times}\,\overline{\varepsilon}} = \frac{\overline{\delta}}{\underset{\cdot}{\times}\,\overline{\varepsilon}} \;\Bigg|\; \frac{\overline{\eta}}{\overline{\varepsilon}\underset{\cdot}{\times}} \underset{\cdot}{\times} \frac{\overline{\delta}}{\overline{\eta}\underset{\cdot}{\times}} = \frac{\overline{\delta}}{\overline{\varepsilon}\underset{\cdot}{\times}}$$

Het bewijs worde aan den lezer overgelaten (vermenigvuldig beide leden aan de juiste zijde met $\overline{\varepsilon}$).

De verschillende formules der boldriehoeksmeting laten zich zeer eenvoudig uit de verkregen betrekkingen afleiden. Daarvoor zijn echter de regels voor de vermenigvuldiging van drie vectoren noodig, die dus eerst zullen worden afgeleid.

Associatieve wet der quaternionische vermenigvuldiging.

Uit de meetkundige voorstelling van het product van twee versoren volgt een eenvoudige voorstelling van de associatieve wet. (Zie fig. 3).

De zijde $\mathbf{rp} = \overline{\beta} \underset{\cdot}{\times} \overline{\alpha}$,

dus zijde $\mathbf{ps}$ (in $\Delta\,\mathbf{psr}$) $= \overline{\gamma} \underset{\cdot}{\times} (\overline{\beta} \underset{\cdot}{\times} \overline{\alpha})$.

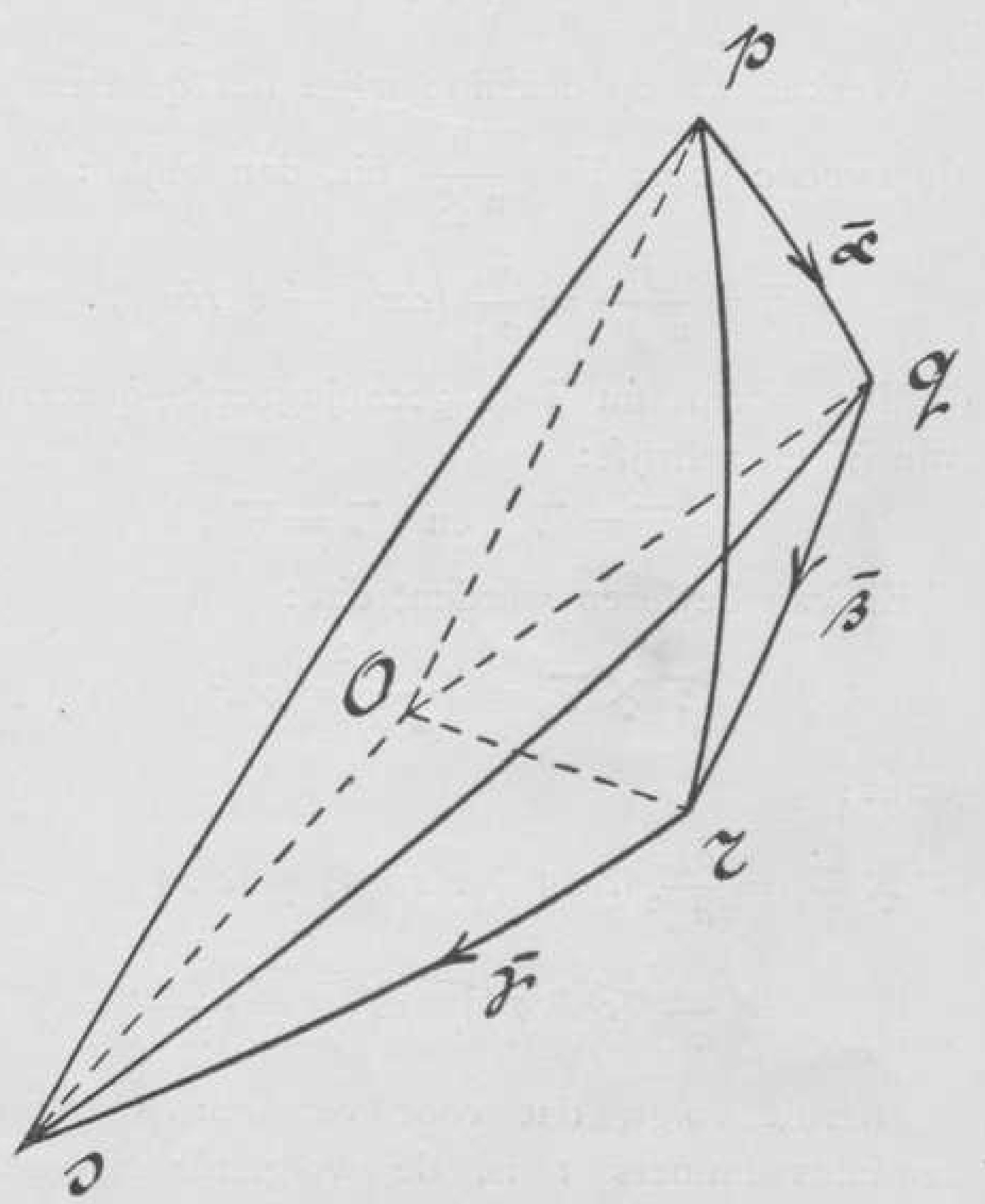


Fig. 3.

Ook is zijde $\mathbf{qs} = \overline{\gamma} \underset{\cdot}{\times} \overline{\beta}$,

dus zijde $\mathbf{ps}$ (in $\Delta\ \mathbf{psq}$) $= (\overline{\gamma} \underset{\cdot}{\times} \overline{\beta}) \underset{\cdot}{\times} \overline{\alpha}$.

Hieruit volgt, dat:

$$\overline{\gamma} \underset{\cdot}{\times} (\overline{\beta} \underset{\cdot}{\times} \overline{\alpha}) = (\overline{\gamma} \underset{\cdot}{\times} \overline{\beta}) \underset{\cdot}{\times} \overline{\alpha}.$$

Deze eigenschap geldt algemeen, ook wanneer de versoren quaternionen worden.

Want:

$$(\overline{\alpha} \underset{\cdot}{\times} \overline{\beta}) \underset{\cdot}{\times} \overline{\gamma} = \alpha_m \beta_m \gamma_m (\overline{\alpha_I} \underset{\cdot}{\times} \overline{\beta_I}) \underset{\cdot}{\times} \overline{\gamma_I} =$$
$$= \alpha_m \beta_m \gamma_m\ \overline{\alpha_I} \underset{\cdot}{\times} (\overline{\beta_I} \underset{\cdot}{\times} \overline{\gamma_I})$$
$$= \overline{\alpha} \underset{\cdot}{\times} (\overline{\beta} \underset{\cdot}{\times} \overline{\gamma})$$

Hetzelfde geldt natuurlijk ook voor het speciale geval dat de quaternionen zich tot vectoren reduceeren:

$$(\mathbf{a} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{b}) \underset{\cdot}{\times} \mathbf{c} = \mathbf{a} \underset{\cdot}{\times} (\mathbf{b} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{c}).$$

Uit dezen vermenigvuldigingsregel volgen de drie regels voor producten van drie vectoren.

Eerste Hoofdregel.

De associatieve wet leert:

$$(\mathbf{a} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{b}) \underset{\cdot}{\times} \mathbf{c} = \mathbf{a} \underset{\cdot}{\times} (\mathbf{b} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{c}).$$

Door uitwerken verkrijgt men:

$$(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,\mathbf{c} + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,.\,\mathbf{c} + (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} =$$
$$+\,\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c}) + \mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

We merken nu op, dat in het linkerlid der vergelijking één skalar voorkomt n.l. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,.\,\mathbf{c}$ en twee vectoren.

In het rechterlid der vergelijking komt ook één skalar voor n.l. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ en twee vectoren. De twee skalairen moeten dus aan elkaar gelijk zijn:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,.\,\mathbf{c} = \mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

of, anders geschreven:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,.\,\mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\,.\,\mathbf{a}.$$

Daar men echter evenzoo door andere keuze der letters kan bewijzen dat:

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c})\,.\,\mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\,.\,\mathbf{b}$$

is:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,.\,\mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\,.\,\mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\,.\,\mathbf{b} \\ \text{of ook:} \\ \mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\,.\,(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c}\,.\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \end{array}\right\}\ \text{Hoofdregel I.}$$

Tweede Hoofdregel.

Anderzijds moeten ook de overige termen, die allen vectoren zijn, aan elkaar gelijk zijn:

$$(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,\mathbf{c} + (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c}) + \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Door andere keuze van letters is evenzoo aan te toonen:

$$(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c})\,\mathbf{a} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b}\,(\mathbf{c}\,.\,\mathbf{a}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$$
$$(\mathbf{c}\,.\,\mathbf{a})\,\mathbf{b} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{c}\,(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Tellen we de beide leden dezer drie vergelijkingen bij elkaar op, dan vindt men, na deeling door 2:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0 \\ \text{waaruit tevens volgt:} \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0 \end{array}\right\}\ \text{Hoofdregel II.}$$

Derde Hoofdregel:

Uit de eerste der drie reeds boven gebruikte vergelijkingen:

$$(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,\mathbf{c} + (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c}) + \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

volgt verder:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c}) - (\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,\mathbf{c}$$

of, met toepassing van den tweeden hoofdregel:

$$-(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c}) - (\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,\mathbf{c}$$

waaruit, door cyclische permutatie, volgt:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c}) - \mathbf{b}\,(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{c}) \\ \text{en:} \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,\mathbf{c} - (\mathbf{a}\,.\,\mathbf{c})\,\mathbf{b}. \end{array}\right\}\ \text{Hoofdregel III.}$$

De vector $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ ligt in het vlak van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$, en moet dus in $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ uit te drukken zijn. De coëfficienten voor deze uitdrukking worden juist gegeven door den derden hoofdregel, zij zijn $(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c})$ en $-(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{c})$.

Toepassing op de eigenschappen van den boldriehoek.

Bewijs der eigenschap:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{\sin\beta}{\sin\beta'} = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'}$$

Daar $\mathbf{c}$ de eenheidsvector is $\perp$ op $\mathbf{a}'$ en $\mathbf{b}'$, toegevoegd aan de richting van $\mathbf{a}'$ naar $\mathbf{b}'$, en γ de hoek tusschen $\mathbf{a}'$ en $\mathbf{b}'$, is (zie fig. 2):

$$\mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = \mathbf{c}\sin\gamma$$

en evenzoo:

$$\mathbf{c}'\sin\gamma' = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Skalaire vermenigvuldiging der overeenkomstige leden dezer twee vergelijkingen met elkaar geeft:

$$(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}')\,.\,\mathbf{c}'\sin\gamma' = \mathbf{c}\,.\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\sin\gamma$$
$$= (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,.\,\mathbf{c}\sin\gamma.$$

Waaruit:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'} = \frac{(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}')\,.\,\mathbf{c}'}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,.\,\mathbf{c}}$$

Op dezelfde wijze is:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\beta'} = \frac{(\mathbf{c}' \times \mathbf{a}') \cdot \mathbf{b}'}{(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}},$$

hetgeen, onder toepassing van den eersten hoofdregel, leert:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\beta'} = \frac{(\mathbf{c}' \times \mathbf{a}') \cdot \mathbf{b}'}{(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}} = \frac{(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \cdot \mathbf{c}'}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'}$$

en door cyclisch permuteeren:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{\sin\beta}{\sin\beta'} = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'} \text{ w.t.b.w.}$$

Toepassing op de beweging van een vast lichaam.

We zullen hier het bewijs geven van een stelling, die we bij de toepassingen van de vectorische vermenigvuldiging van twee vectoren zonder meer aannamen, de stelling n.l., dat de algemeenste beweging van een vast lichaam bestaat uit een translatie gecombineerd met een rotatie.

Stel dat $\mathbf{v}$ als functie van $\mathbf{r}$ is gegeven. Neem een willekeurig punt P met snelheid $\mathbf{v}_0$, dan is:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}',$$

waarbij $\mathbf{v}'$ de snelheid is ten opzichte van het bewegende punt P. Kunnen we bewijzen dat $\mathbf{v}'$ een draaiïng is om P als middelpunt, dan is de totale beweging dus een translatie $\mathbf{v}_0$ gecombineerd met een rotatie.

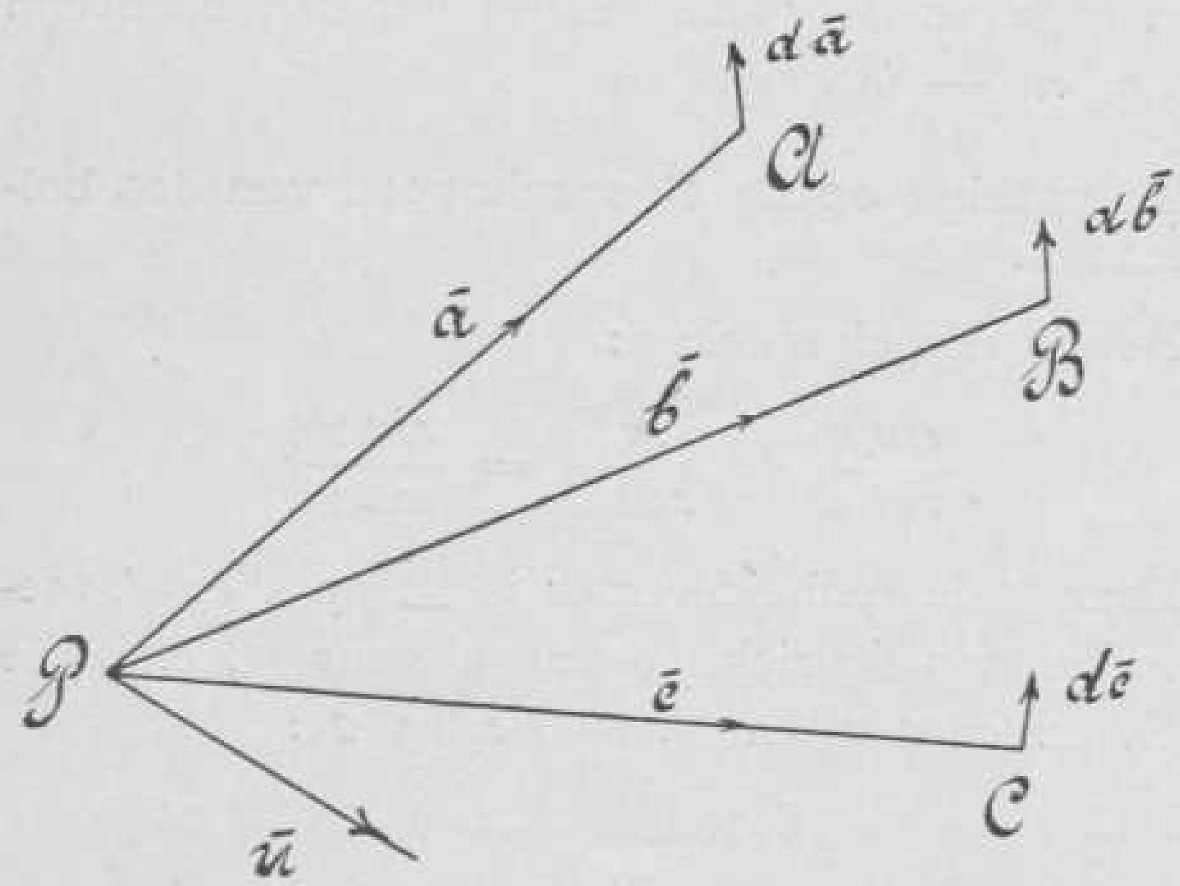


Fig. 4.

Beschouw daartoe nog drie andere willekeurige punten A, B en C van het lichaam, op afstanden $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$ van P. (Zie fig. 4). Zij de verplaatsing van A, B en C in een tijd dt resp. $d\mathbf{a}$, $d\mathbf{b}$ en $d\mathbf{c}$. Het lichaam is vast, dus moeten de onderlinge afstanden tusschen P, A, B en C even groot blijven. Dit geeft aanleiding tot twee stel vergelijkingen, n.l.:

$$\mathbf{a}^{2\cdot} = (\mathbf{a} + d\mathbf{a})^{2\cdot}, \text{ cycl.},$$

dus:

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} = 0, \text{ cycl.},$$

d.w.z. $\mathbf{a} \perp d\mathbf{a}$, enz., en:

$$(\mathbf{b} - \mathbf{a})^2 = (\mathbf{b} + d\mathbf{b} - \mathbf{a} - d\mathbf{a})^{2\cdot}$$

waaruit:

$$0 = 2\mathbf{b} \cdot d\mathbf{b} - 2\mathbf{b} \cdot d\mathbf{a} - 2\mathbf{a} \cdot d\mathbf{b} + 2\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} \text{ cycl.}$$

of, in verband met de eerst afgeleide betrekking:

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot d\mathbf{a} = 0, \text{ cycl.}$$

Breng nu door P een as $\perp$ op $d\mathbf{a}$ en $d\mathbf{b}$ en zet op die as een vector $\mathbf{u}$ uit, dan is $d\mathbf{a}$ zoowel $\perp$ op $\mathbf{a}$ als op $\mathbf{u}$, en dus is $\mathbf{u} \times \mathbf{a}$ een vector in de richting van $d\mathbf{a}$. We kunnen dus zorgen dat $\mathbf{u}$ zoo lang is, dat aan de betrekking wordt voldaan:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{a}\, dt = d\mathbf{a}.$$

Daar evenzoo $d\mathbf{b} \perp \mathbf{u}$ en $\perp \mathbf{b}$, is $\mathbf{u} \times \mathbf{b}$ een vector in de richting van $d\mathbf{b}$, zoodat zeker geldt:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{b}\, dt = x\, d\mathbf{b},$$

waarin x een voorloopig onbekend getal.

Nu is echter:

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{b} = -\mathbf{b} \cdot d\mathbf{a},$$

dus:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}\, dt &= x\, d\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = -x\, d\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \\ &= -x\, (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}\, dt, \\ &= x\, (\mathbf{a} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{b}\, dt,\end{aligned}$$

of, onder toepassing van den eersten hoofdregel:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a},$$

waaruit volgt:

$$x = 1.$$

In A en B is dus de beweging een draaiïng om de as $\mathbf{u}$ met een hoeksnelheid u_m, immers

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{v}_a = \mathbf{u} \times \mathbf{a}$$

is juist de vroeger afgeleide uitdrukking voor een rotatie-snelheid.

We moeten nu nog de beweging van het punt C onderzoeken.

Voeren we in de verkregen vergelijkingen:

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{c} = -\mathbf{c} \cdot d\mathbf{a}$$
$$\mathbf{b} \cdot d\mathbf{c} = -\mathbf{c} \cdot d\mathbf{b}$$

de waarden van $d\mathbf{a}$ en $d\mathbf{b}$ in, dan worden deze vergelijkingen, onder toepassing van den eersten hoofdregel:

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{c} = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{a})\, dt = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{c})\, dt$$
$$\mathbf{b} \cdot d\mathbf{c} = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{b})\, dt = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{c})\, dt$$

Bovendien is:

$$\mathfrak{c} \cdot d\,\mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot (\mathfrak{u} \times \mathfrak{c})\,dt,$$

omdat beide leden = 0 zijn. Uit deze drie vergelijkingen volgt echter, dat de componenten, van $d\mathfrak{c}$ in de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ en $\mathfrak{c}$ richting gelijk zijn aan de overeenkomstige componenten van $(\mathfrak{u} \times \mathfrak{c})\,dt$.

Daar de drie richtingen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ en $\mathfrak{c}$ nu *geheel willekeurig* zijn, volgt:

$$d\,\mathfrak{c} = (\mathfrak{u} \times \mathfrak{c})\,dt$$

De beweging van het punt $\mathfrak{c}$, en dus van ieder willekeurig punt is dus een draaiing om de as $\mathfrak{u}$ met hoeksnelheid u_m.

De algemeene beweging van het vaste lichaam is daarmede herleid tot een translatie en een rotatie.

Dat door geëigende keuze van P de beweging tenslotte kan ontbonden worden in een translatie volgens de as van wenteling en een rotatie om die as, dus een zuivere schroefbeweging, is reeds vroeger bewezen.

Toepassing op de beweging van een vast lichaam. (Beginsel der virtueele verplaatsingen).

Dit beginsel zegt het volgende:

Wanneer een lichaam in evenwicht is onder invloed van een stelsel krachten, dan zal na een mogelijke oneindig kleine (virtueele) verplaatsing de som der door de krachten verrichte arbeidshoeveelheden gelijk nul zijn.

Gegeven een stel krachten $\mathbf{K}_\alpha$, $\mathbf{K}_\beta \ldots \mathbf{K}_\nu$, waarvan de aangrijpingspunten vastgelegd zijn door de vectoren uit een punt O, $\mathbf{r}_\alpha$, $\mathbf{r}_\beta \ldots \mathbf{r}_\nu$. Verder zij gegeven, dat de krachten in evenwicht zijn. Zooals we vroeger afgeleid hebben, geldt dan:

$$\sum_\alpha^\nu \mathbf{K} = 0,$$

$$\sum_\alpha^\nu \mathbf{r} \times \mathbf{K} = 0.$$

De algemeenste beweging van een lichaam is:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + (\mathfrak{u} \times \mathbf{r}).$$

Een willekeurige mogelijke verplaatsing dt is dus:

$$d\mathbf{s} = \mathbf{v}\,dt = \mathbf{v}_0\,dt + \mathfrak{u}\,dt \times \mathbf{r}$$
$$= d\mathbf{s}_0 + (\mathfrak{u}\,dt \times \mathbf{r}).$$

De arbeid, die een kracht $\mathbf{K}_\epsilon$ verricht bij de virtueele verplaatsing $d\mathbf{s}$ is dus:

$$-\mathbf{K}_\epsilon \,.\, \{ d\mathbf{s}_0 + (\mathfrak{u}\,dt \times \mathbf{r}) \}$$

De totale arbeid bij de virtueele verplaatsing verricht is derhalve:

$$A = -\sum_\alpha^\nu \mathbf{K} \,.\, \{ d\mathbf{s}_0 + (\mathfrak{u}\,dt \times \mathbf{r}) \}$$
$$= -\left(\sum_\alpha^\nu \mathbf{K}\right) . \, d\mathbf{s}_0 - \sum_\alpha^\nu \mathbf{K} \,.\, \mathfrak{u}\,dt \times \mathbf{r})$$

De eerste term is nul, omdat wegens het bestaande evenwicht:

$$\sum_\alpha^\nu \mathbf{K} = 0.$$

De tweede term is te vervormen onder toepassing van den eersten hoofdregel:

$$-\sum_\alpha^\nu \mathbf{K} \,.\, (\mathfrak{u}\,dt \times \mathbf{r}) = -\sum_\alpha^\nu \mathfrak{u}\,dt \,.\, (\mathbf{r} \times \mathbf{K}).$$

Nu is $\mathfrak{u}\,dt$ niets anders dan de hoek, waarover het lichaam gedraaid is. Daar het lichaam vast is, hebben alle termen van de som dezen factor gemeen, die dus voor het sommatieteeken mag worden gebracht. Wegens het bestaande evenwicht blijkt dan echter ook de tweede term nul te zijn:

$$-\sum_\alpha^\nu \mathfrak{u}\,dt \,.\, (\mathbf{r} \times \mathbf{K}) = -\mathfrak{u}\,dt \,.\, \sum_\alpha^\nu (\mathbf{r} \times \mathbf{K}) = 0,$$

waarmede het beginsel der virtueele verplaatsingen bewezen is.

(Wordt vervolgd).

Sterftekans en Sterftetafels,

door H. T. HOVEN, gep. kapt. ter zee.

II.

In de Bijdragen tot de Statistiek van Nederland, V, uitgegeven door de Centrale Commissie voor de Statistiek in 1897, zet de oud-hoogleeraar Dr. A. J. VAN PESCH uitvoerig uiteen hoe te werk wordt gegaan bij de samenstelling der sterftetafels, die na iedere 10-jarige volkstelling worden opgemaakt. Onder verwijzing naar deze Bijdrage voor hen, die zich volledig op de hoogte willen stellen, moge hieronder een beknopte uiteenzetting volgen en wel aan de hand van de uitkomsten der volkstellingen op 31 December 1899 en 1909.

De volkstelling geeft de bevolking aan in groepen van personen *van hetzelfde geboortejaar* (mannen en vrouwen afzonderlijk), zooals die op 31 December van het een of ander jaar in leven zijn en verdeelt dus de levenden in groepen van personen, die allen den zelfden leeftijd in volle jaren hebben. Gaat men nu van de uitkomsten van zulk een volkstelling, bv. die van 31 December 1899, uit en vermindert men elke groep met het aantal uit deze, dus van hetzelfde geboortejaar, in 1900 overleden, zoo verkrijgt men de groepen, zooals die op 31 December 1900, maar nu één jaar ouder, zullen voorkomen. Deze worden op hun beurt verminderd met de overledenen in 1901, weder uit dezelfde geboortejaren; daardoor verkrijgt men de groepen van personen, die op 31 December 1901 leefden en nu twee jaren ouder zijn. Zoo doorgaande verkrijgt men ten slotte de groepen van levenden op 31 December 1909 en weder gescheiden naar de geboortejaren, dus naar de leeftijden in volle jaren, gescheiden, van den ouderdom van 10 jaar af.

Voegt men hierbij de aantallen van de geborenen tusschen 1 Januari 1900 en 31 December 1909, nadat ook deze verminderd zijn met het aantal gestorvenen daaruit, zoo verkrijgt men alle groepen zooals die op 31 December 1909 bestaan. Deze uitkomst zou overeenkomen met het resultaat der volkstelling op dien datum, wanneer er geen fouten voorkwamen bij de volkstellingen, de opgaven van geboorten en overlijden bij den burgerlijken stand juist waren en er geen verhuizingen van en naar het buitenland hadden plaatsgehad.

De volkstellingen geschieden zoo nauwkeurig mogelijk door daartoe bekwaamd personeel; groote fouten zijn niet te verwachten. De aangiften van geboorte en sterfte bij den Burgerlijken Stand hebben met zoovele formaliteiten plaats, dat daarin geen onjuistheden zijn. Anders is het met de verhuizingen. Velen verzuimen zich te doen uitschrijven, vooral bij vertrek naar de koloniën.

De verschillen, die bij de volkstelling worden aangetroffen, met de op de aangegeven wijze verkregen getallen, moeten dan ook toegeschreven worden aan de verhuizingen. Het aantal is evenwel niet groot en de daardoor ontstane onnauwkeurigheden in de sterftekansen zijn niet grooter dan een eenheid in de 5de decimaal. De verschillen worden vereffend door ze gelijkmatig te verdeelen over de jaren tusschen 1900 en 1909.

Op deze wijze verkrijgt men dus het aantal levenden op den laatsten dag van elk jaar, gerangschikt naar hun leeftijd in volle jaren. Met datzelfde aantal begint men het volgend jaar en moet men daarop de sterfgevallen onder hen in dat jaar toepassen om tot de sterftekans te geraken. Een voorbeeld moge dit verduidelijken.

Op 31 December 1899 waren in leven 33.781 30-jarige mannen, die dus allen in 1869 geboren waren. Daarmede wordt het jaar 1900 ingegaan. In laatstgenoemd jaar overleden 201 mannen, die 1869 tot geboortejaar hadden. Door het getal der levenden te deelen op dat der overledenen, verkrijgt men de sterftekans, zijnde 0.00595.

Voor de negen opvolgende jaren is evenzoo gehandeld; men verkrijgt door het middelen der 10 uitkomsten het getal 0.00478, zijnde de gemiddelde sterftekans voor 30-jarige mannen gedurende het tijdvak 1900/09, waarvan het midden is: 1 Januari 1905.

De 33.781 mannen, op 31 December 1899 in leven, zijn allen geboren in 1869, maar allen daarom niet precies 30 jaar oud. Enkelen zijn geboren in de eerste dagen van dat jaar, dus ruim 30 jaar 11 maanden oud, anderen hebben een ouderdom van 30 jaar en eenige dagen. Aannemende dat de geboorten over het kalenderjaar regelmatig verdeeld zijn, hetgeen niet juist, maar blijkens een daartoe ingesteld onderzoek, niet ver van de waarheid af is, kan de gemiddelde leeftijd van die 33.781 mannen op 30$^1/_2$ jaar gesteld worden. De hieronder volgende sterftekansen hebben dus betrekking op mannen, oud gemiddeld 30$^1/_2$ jaar.

Mannen 30$^1/_2$ jaar oud, tijdvak 1900—1909.

Jaar:	geboren in:	levenden:	dooden:	sterftekansen:
1900	1869	33.781	201	0.00595
1901	1870	34.703	190	0.00548
1902	1871	33.860	181	0.00535
1903	1872	37.042	184	0.00497
1904	1873	37.852	168	0.00444
1905	1874	38.645	167	0.00432
1906	1875	38.972	166	0.00426
1907	1876	40.699	160	0.00393
1908	1877	41.039	201	0.00490
1909	1878	41.097	174	0.00423
Som:		377.690	1792	0.04783
			gemiddeld:	0.00478

Voor elken ouderdom, tot en met 90$^1/_2$ jaar, verkrijgt men op deze wijze een waarde voor de sterftekans. Het aantal oudere menschen is te gering, om uit hunne sterfte betrouwbare gevolgtrekkingen te maken. Volledigheidshalve zij nog vermeld, dat de sterftekansen van kinderen onder de 3 jaar ook volgens een eenigszins andere methode worden afgeleid, omdat bij deze jeugdige leeftijden, geboorten en sterfgevallen niet als over het jaar regelmatig verdeeld aangenomen mogen worden.

Beschouwt men de afwijkingen, die de 10 waarden hierboven voor de sterftekans van een $30^1/_2$-jarige opgegeven, als ontstaan door toevallige omstandigheden, dan kan daaruit de middelbare fout opgemaakt worden, volgens de formule $\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n(n-1)}}$. Daarin stelt Σv^2 voor de som der kwadraten van de verschillen, die men verkrijgt, als men elk der uitkomsten met het gemiddelde vermindert en n het aantal waarnemingen, hier 10.

De middelbare fout van de hiervoren gemelde gemiddelde sterftekans is, volgens die formule, 0.00021.

De 10 sterftekansen in de laatste kolom hebben betrekking op dezelfde grootheid, verkregen in 10 opvolgende jaren. Daaronder zijn jaren, waarin de sterfte, over ongeveer alle leeftijden, zoowel bij mannen als bij vrouwen, ongunstig is in vergelijk met de andere jaren. Voor het tijdvak 1900/09 blijkt dat het jaar 1900 zoowel voor mannen als vrouwen de meeste maxima van de sterftekansen, behoorende bij de 90 verschillende leeftijden, opgeleverd heeft, n.l. bij 56, resp. 55 (totaal 111) leeftijden; in 1909 slechts bij 1 leeftijd, zooals onderstaande tabel aangeeft.

Maxima en minima in de waarden der sterftekansen.

Jaar:	maxima			minima		
	mannen	vrouwen	totaal	mannen	vrouwen	totaal
1900	56	55	111	1	1	2
1901	17	15	32	1	2	3
1902	8	9	17	0	1	1
1903	3	1	4	6	13	19
1904	1	2	3	7	5	12
1905	0	2	2	3	5	8
1906	2	1	3	18	16	34
1907	2	1	3	8	10	18
1908	0	4	4	18	15	33
1909	1	0	1	28	22	50

Het jaar 1900 is dus een ongezond jaar geweest. De minima van de sterftekansen zijn meer over vele der 10 waarnemingsjaren verdeeld, maar toch blijkt wel dat de laatste vier jaren van het decenium, in vergelijking met de daaraan voorafgaande een gunstiger sterfte, een kleiner sterftekans, vertoonen dan de voorafgaande jaren en als gezonde jaren kunnen worden aangemerkt

Hieruit is de conclusie te trekken, dat in sommige jaren een oorzaak aanwezig is, waardoor de sterfte abnormaal hoog of laag wordt. Uit de sterfte-statistiek over 1911 is gebleken, dat de bizonder warme zomer van dat jaar een groote sterfte onder de zuigelingen teweeg heeft gebracht.

Er was dus een afzonderlijk daartoe ingesteld onderzoek noodig om te mogen aannemen, dat de algemeene foutenwet van toepassing is op de verschillen, die de sterftekansen in een serie van 10 jaar vertoonen; of dus, afgescheiden van het feit, dat in een enkel jaar een aan te wijzen oorzaak van een veranderde sterfte aanwezig is, hier van *toeval* gesproken mag worden. Dit onderzoek heeft de oud-hoogleeraar VAN PESCH verricht, waaruit bleek, dat werkelijk de afwijkingen van de gemiddelde sterftekansen, opgemaakt over de 10 jaren, de foutenwet volgen, welke luidt, dat het aantal afwijkingen van een bepaalde grootte een functie is van die grootte, dat kleine afwijkingen meer voorkomen dan groote en wel volgens een bepaalde wet.

Later zullen wij zien, welk gebruik gemaakt wordt van de middelbare fout.

Op de wijze als voor den $30^1/_2$-jarigen leeftijd aangegeven wordt ook met de andere leeftijden beneden de 91 jaar gehandeld en verkrijgt men sterftekansen, die een groote mate van waarschijnlijkheid bezitten. Vergelijkt men die sterftekansen voor de opvolgende leeftijden, dan blijkt daaruit een zeer regelmatig verloop, zoo als onderstaand uittreksel aangeeft.

Leeftijd:	Sterftekans:	Middelbare fout:
$26^1/_2$	0.00478	0.00015
$27^1/_2$	0.00478	0.00021
$28^1/_2$	0.00475	0.00021
$29^1/_2$	0.00480	0.00019
$30^1/_2$	0.00478	0.00021
$31^1/_2$	0.00483	0.00019
$32^1/_2$	0.00490	0.00019
$33^1/_2$	0.00508	0.00015
$34^1/_2$	0.00527	0.00018
$35^1/_2$	0.00545	0.00018

Zet men de getallen, welke de sterftekans op iederen leeftijd aangeven, uit in een rechthoekig coördinatenstelsel, de leeftijden als abcissen en de sterftekansen als ordinaten, dan verkrijgt men een aantal punten, waardoor een kromme lijn kan worden getrokken en die *sterftekromme* wordt genoemd.

Die lijn moet een regelmatig verloop hebben, omdat de sterfte bij verandering van den leeftijd niet aan plotselinge verandering onderhevig is. Wanneer dus hier en daar kleine bochten en onregelmatigheden voorkomen is zulks te wijten aan kleine fouten in de sterftekansen.

De berekende sterftekansen zijn dus nog voor verbetering vatbaar en moet er getracht worden uit de reeds verkregen waarschijnlijke waarden sterftekansen af te leiden, welke nog grooter waarschijnlijkheid bezitten. Dit geschiedt door de verkregen uitkomsten *af te ronden*, te ontdoen van de verschillende afwijkingen.

Het eenvoudigst kan dit geschieden langs den grafischen weg; maar hoewel deze methode voor het uiterlijk fraaie uitkomsten geeft, is het een werk, waarbij steeds eenige willekeur kan plaats hebben. Men heeft ook verschillende formules bedacht, waarvan de constanten empirisch, d.i. uit de verkregen uitkomsten, bepaald moeten worden. Die van MAKEHAM, geheel berustend op theoretische gronden, levert verrassend goede resultaten op. Zij heeft den vorm van $l_t = k \,.\, s^t \,.\, g^{q^t}$, waarin: t de leeftijd en l_t het aantal levenden van dien leeftijd voorstellen. De overige grootheden zijn constanten, uit de waarnemingen te bepalen. Feitelijk geeft deze formule niet de sterftekansen, maar het aantal levenden op iederen leeftijd, uitgaande van b.v. 100.000 geboorten; de sterftekansen kunnen daaruit op eenvoudige wijze worden berekend.

Professor VAN PESCH gaat als volgt te werk om op volkomen juiste wijze een stap nader tot de waarheid te komen.

Hoedanig de vorm van de sterftekromme ook moge zijn, een klein gedeelte ervan kan worden voorgesteld door een algebraïsche kromme, waarvan de vergelijking de gedaante heeft:

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots \text{ enz.}$$

Onderzoekingen hebben aangetoond, dat met voldoende nauwkeurigheid de vierde en hoogere machten mogen worden verwaarloosd, dat een klein gedeelte van de sterftekromme dus beschouwd mag worden als een lijn van den 3den graad. De termen vormen dan een rekenkundige reeks van de 3e orde, waarvan de vierde verschillen nul zijn.*)

Tusschen 5 opvolgende sterftekansen, ω_{-2}, ω_{-1}, ω, ω_1 en ω_2 bestaat dan de betrekking:

$$\omega_{-2} - 4\omega_{-1} + 6\omega - 4\omega_1 + \omega_2 = 0 \text{ of}$$

$$\omega = \frac{4(\omega_{-1} + \omega_1) - (\omega_{-2} + \omega_2)}{6}$$

Voert men voor ω_{-2}, ω_{-1}, ω, ω_1 en ω_2 de waarden in gevonden voor de sterftekansen van $28^1/_2$, resp. $29^1/_2$, $31^1/_2$ en $32^1/_2$ jaar, (zie tabel blz. 133, 2e kolom) dan vindt men voor een nieuwe waarde van de sterftekans bij $30^1/_2$ jaar en wel 0.00529, in plaats van 0.00521, gevonden uit de rechtstreeksche waarneming.

Eerstgenoemde waarde zal *in het algemeen* grooter waarschijnlijkheid bezitten; het kan echter gebeuren, dat eenige der omliggende sterftekansen, die tot de berekening gediend hebben, toevallig te groot of te klein waren.

Uit die twee waarden kan echter de meest waarschijnlijke sterftekans worden berekend door gebruik te maken van ieders middelbare fout. Die der sterftekans, uit de waarnemingen direct afgeleid, hebben we reeds aangegeven.

Om de middelbare fout te vinden van de andere waarde van de sterftekans, maken wij gebruik van de eigenschap, dat de middelbare fout van de som of het verschil van eenige grootheden gelijk is aan den vierkantswortel uit de som der kwadraten van de middelbare fout dier grootheden, daarbij lettende op de gewichten dier grootheden.

In de waarde van ω hebben immers ω_{-1} en ω_1 een 4-maal grooter gewicht (invloed) dan ω_{-2} en ω_2.

Noemen wij de middelbare fout van ω_{-2}, ω_{-1}, enz. m_{-2}, m_{-1} enz., dan is dus

$$m = \sqrt{\left\{\left(\frac{4}{6}m_{-1}\right)^2 + \left(\frac{4}{6}m_1\right)^2 + \left(\frac{1}{6}m_{-2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}m_2\right)^2\right\}}$$

of invoerende de numerieke waarde van $m_{28^1/_2}$, $m_{29^1/_2}$ enz.

$$m_{30^1/_2} = 0.00014.$$

---

*) De n^{de} term van een rekenkundige reeks van de 3e orde wordt voorgesteld door:

$$T_n = a + (n-1)v_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2}v_2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}v_3.$$

Ontwikkelt men deze vergelijking en rangschikt die men volgens de machten van n, zal men komen tot een vorm, die de gedaante heeft:

$$T_n = a + bn + cn^2 + dn^3.$$

Dus een vergelijking van den 3en graad. Omgekeerd vormen de termen van zulk een vergelijking een reeks van de 3e orde.

Wij hebben nu twee waarden gevonden voor de sterftekans voor den leeftijd van $30^1/_2$ jaar en wel: direct uit de

waarnemingen: 0.00521 midd. fout: 0.00018
uit de 4 omliggende
waarnemingen: 0.00529 „ „ 0.00014

Uit deze twee waarden de meest waarschijnlijke sterftekans berekenende, met ieders middelbare fout als gewicht, verkrijgt men op overeenkomstige wijze, als eindwaarde voor de sterftekans van een $30^1/_2$ jarigen man: 0.00525.

Handelt men voor elken leeftijd op dezelfde wijze en zet men de alsdan verkregen waarden van de sterftekansen in een coördinatenstel af, dan verkrijgt men voor de sterftekromme een vloeiende lijn.

Tenslotte moeten nog berekend worden de sterftekansen voor de geheele levensjaren. Zulks geschiedt door de sterftekans op 30 jaar b.v. te beschouwen, als de $2^1{}_2^{de}$ term van een reeks der 3^{de} orde, waarvan de 1^{ste}, 2^{de}, 3^{de} en 4^{de} term zijn de sterftekansen op $28^1/_2$, $29^1/_2$, $30^1/_2$ en $31^1/_2$ jaar.

De einduitkomst is dan:

Sterftekans voor een man oud 29 jaar:		0.00501
30	„	0.00517
31	„	0.00536
32	„	0.00558

(*Wordt vervolgd*).

BOEKBESPREKING.

AFBEELDINGEN VAN DE ONTWERPEN VOOR HET PANTHEON DER MENSCHHEID door Dr. H. P. Berlage Nz., met een bijschrift in verzen door Henriette Roland Holst—van der Schalk. Rotterdam 1915. W. J. en J. Brusse, Uitgeversmaatschappij.

Koning Cheops bouwde te zijner eigene nagedachtenis de pyramide in Girch, Shah Jehan de Tay Mehal voor zijn uitverkorene Tariste; waarom zou de menschheid, één geworden na den scheidenden wereldoorlog tot het treurend en dankend gedenken van de gevallen honderdduizenden, niet een monument stichten kunnen, het Pantheon der Menschheid!

Op de laatste tentoonstelling van Architectura et Amicitiae te Amsterdam heeft Berlage een ontwerp voor zulk een Pantheon: een wijden koepel op breede terrassen met hooge torens in een achthoek daarom heen geëxposeerd. Bij Brusse verschenen de reproducties van de knappe teekeningen, voor dit ontwerp door den Bouwkundigen Ingenieur D. Roosenburg gemaakt, tevens een bijschrift in verzen van Henriette Roland Holst—van der Schalk en de vier citaten, die als kernspreuken de ideale bedoeling van het ontwerp uitdrukken.

Een critische beschouwing van de architectuur van Berlage's ontwerp is in deze boekbespreking niet op hare plaats, wel echter een aanbeveling aan ieder, die gevoelig is voor zuiver architectonische effecten. Hem zullen zeker deze teekeningen, het geheel, de details en het monument der Menscheneenheid in den koepel, vreugde geven, en zoo hij zelve zoeker is, een aanmoediging zijn.

B.

—o—

LEERBOEK DER ANORGANISCHE CHEMIE, door Dr. A. F. Holleman, L.L.D., Hoogleeraar te Amsterdam. Vijfde, geheel herziene druk. Uitgever J. B. Wolters' U. M. Groningen 1915. Prijs f 8.

Dit leerboek, dat zich in hoofdzaak geheel aansluit bij de colleges van Dr. W. Reinders, enkele details daargelaten, kan vrijwel als handleiding bij dat onderwijs gebezigd worden.

De voornaamste onderwerpen, in deze nieuwe uitgave, welke onze belangstelling in bijzondere mate trekken, en welke, zooals de schrijver het ons in zijne voorrede mededeelt, gereviseerd zijn naar de nieuwste en betrouwbaarste bronnen, zijn:

1. De methoden ter bepaling van den evenwichtstoestand in gassen, volgens Nernst. 2. Het physische gedrag van water in verband met de associatie zijner moleculen. 3. De ionisatie in andere vloeistoffen dan water. 4. De allotropie der zwavel. 5. De actieve stikstof van Strutt. 6. De technische bereidingsmethoden van ammoniak. 7. De edele gassen. 8. De onderzoekingen van Stock over de P.-S.-verbindingen. 9. De kolloïden. 10. De onderzoekingen van Nernst en Lindemann betreffende de wet van Dulong en Petit. 11. Het periodieke systeem der elementen. 12. De smeltkromme voor de hydraten van H_2SO_4. 13. De ligging der spectraalstrepen en zeemansonderzoek over hun splitsing in een magnetisch veld als bewijs voor het bestaan der electronen. 14. De anorganische evolutie der elementen. 15. De radioactieve elementen en de elementen met inconstant atoomgewicht. 16. De absorptie der akkeraarde en de permutieten. 17. Het onderzoek van Urbain over de scheiding der zeldzame aarden. 18. Het mesothorium van Hahn. 19. De metallische toestand en de onderlinge metaalverbindingen.

Speciaal kunnen we de aandacht vragen voor het hoofdstuk over „kolloïden", welk onderwerp behalve belangrijk uit een oogpunt van anorganische chemie, nuttig blijkt op het gebied van de biologie en meteorologie.

Ook hetgeen er vermeld staat over „de technische ammoniakbereidingen" en andere bereidingen, welke in nauw verband staan met de praktijk, geeft ons de overtuiging dat dit leerboek zich vooral op chemisch technologisch gebied hoe langer hoe meer zal aanpassen bij de studie voor scheikundig ingenieur.

Evenwel missen we eenige belangrijke bereidingswijzen, zooals bv. die voor zuurstof:

a. Langs mechanischen weg, uit atmospherische lucht volgens Mallet.

b. Door gebruik te maken van gefractionneerde destillatie van vloeibare lucht.

c. Volgens de chemische methode van Boussingault-Brin.

d. Volgens de methode van Kassner.

Verder lijkt ons gewenscht een uitvoeriger bespreking van de „Kwikzilver-methode" en de „Klok-methode" bij de natriumhydroxyde-bereiding; en in 't algemeen een minder beknopte beschrijving van de metallurgie der metalen uit hunne ertsen.

Afgezien van eenige germanismen, z.a. „fabriekmatig" (blz. 378) en onbeduidende drukfouten, gelooven we te mogen veronderstellen dat deze 5de druk een zelfde succes zal beleven als de 4 voorgaande, waarvan de ste in 1898 verscheen.

C. G. D.

STRIKVRAGEN.

Strikvraag No. 16.

Ingenieurs moeten op 't oog maten kunnen schatten.

1.) Hoe groot schat ge, zonder het te zien, den diameter van een dubbeltje?

2.) Haal het dubbeltje te voorschijn, wat schat gij het nu?

3.) Haal er een duimstok bij, maar houd die nog op afstand van het dubbeltje; wat schat gij nu den diameter?

4.) Meet den diameter.

G. D. B.

Oplossing. *Strikvraag No. 15.*

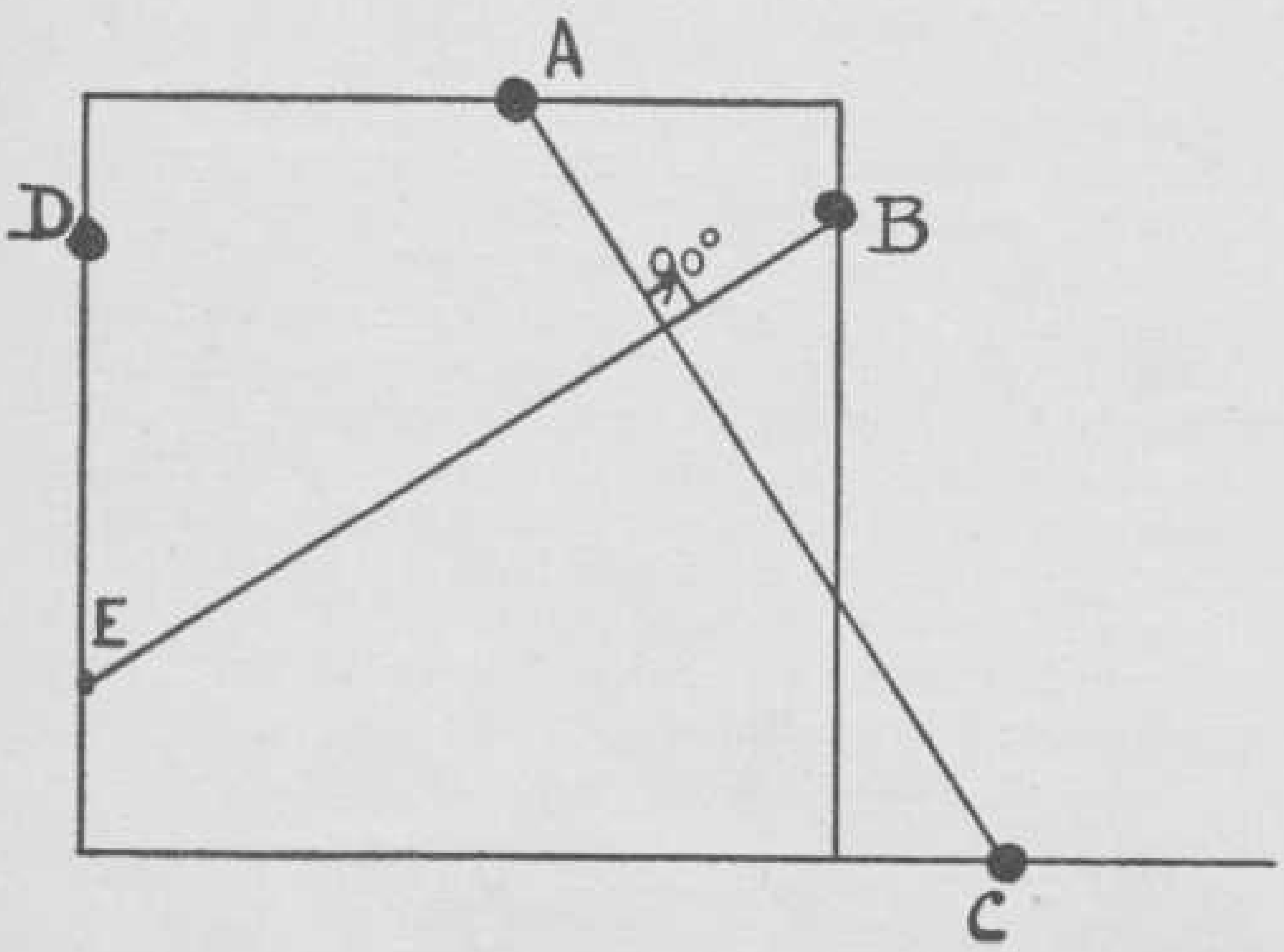
Trek door ieder van 4 punten een lijn, zoo, dat een vierkant wordt afgesneden.

Gegeven de punten A, B, C en D gelegen op de (verlengde) zijden van een vierkant (fig. 1). Trek AC en $BE \perp AC$. Blijkbaar is dan $AC = BE$. Men kan dus op eenvoudige wijze een 2e punt van de zijde door D vinden en het vierkant construeeren.

Er zijn echter meerdere oplossingen mogelijk:

1°) Men kan $BE \perp AC$ naar 2 kanten uitzetten: dit geeft een 2de oplossing.

2°) Men kan in plaats van met AC, ook met AB of AD beginnen, (dat wil zeggen, dat men achtereenvolgens A en C, A en B en A en D kan beschouwen als punten gelegen op tegenovergestelde zijden van het vierkant); dit levert de 3°, 4°, en 5°, en 6° oplossing.



3°) Men had in plaats van met AC met BD kunnen beginnen, maar men had dan geen nieuwe oplossingen gevonden. Om dit te bewijzen, merke men op, dat door A, B en C oneindig veel vierkanten gebracht kunnen worden, hun vierde zijde zal echter altijd door E moeten gaan. Slechts in één stand zal die vierde zijde tevens door D gaan, het vierkant gaat dan door A, B, C en D. Ware men nu met BD begonnen, dan had men ook een vierkant gevonden door A, B, C en D, dat is dus een vierkant door A, B en C, dus een vierkant waarvan de 4de zijde door E gaat, dus een vierkant dat met het vorige samenvalt. Beginnende met CD of BC vindt men evenzoo de zelfde oplossingen als beginnende met AB of AD.

Er zijn dus 6 oplossingen, tenzij D met E samenvalt in welk geval er oneindig veel zijn.

G. D. B.

P.S. Weinig vraagstukken zijn zoo geschikt om aan te toonen, hoe moeilijk het is de „moeilijkheid" van een vraagstuk te beoordeelen. Hier wordt zelden de eenvoudige oplossing gevonden, toch is er „niets aan".

Betreffende dezelfde strikvraag ontvingen wij nog een geheel juist antwoord van den heer W. J. Vollewens, die de eenvoudige oplossing had gevonden.

De Redactie.

TECHNISCHE HOOGESCHOOL.

Examens gehouden in Januari — 1916. —

CANDIDAATS-EXAMEN.

Geslaagd voor:

Civiel-Ingenieur.

G. van Dijk.
C. J. Evers.
J. F. Groote.
A. J. Gurck.
Th. D. van Maanen.
M. H. Maas.
J. G. Meerdink.
L. Meijer.
Th. M. W. A. de Rozario.
J. P. A. van Scherpenberg.
T. W. Siertsema.
W. van der Slik.
H. P. W. M. Smit.
J. Th. Thijsse.
P. van Tiel.
L. Tückermann.
M. Valkenburg.
J. A. W. M. Vetter.
L. de Vogel.
H. Volker.
C. L. de Voogt.
W. Weisfelt.
Ph. H. te Winkel.
C. Zwanenburg.

Bouwkundig Ingenieur.

E. J. Kooreman.
W. Lemei Jr.
W. H Pichel.

Werktuigkundig Ingenieur.

A. van Buysen.	W. Braat.
A. G. Dijkerman.	L. J. G. van Ewijk.
A. W. Jansen.	Ch. A. J. F. Giesberger.
M. Langelaan.	N. J. E. Hageman.
G. W. Semmelink.	Th. Hartelust.
C. Venemans.	J. C. Milborn.
R. Th. Bijleveld.	C. Rodenburg.

Electrotechnisch Ingenieur.

J. A. Spruyt.	A. D. Mesritz.
M. J. de Lange.	R. Koumans.

Scheikundig Ingenieur.

A. C. Binnendijk.	Mej. H. J. van Lutsenburg Maas.
W. J. Couvée.	G. E. van Nes.
J. de Graaff.	M. van Son Pzn.
W. van Lookeren Campagne C.Jzn.	W. Spoon (met lof).

INGENIEURS-EXAMEN.

Geslaagd voor:

Civiel-Ingenieur.

L. J. Boone.	B. F. Prager.
L. Bronkhorst.	J. Prakken.
H. C. P. de Bruyn.	F. Reynst.
W. F. van Dijck.	A. Sissingh.
A. G. Fuchs.	J. Slim.
W. P. C. Hennequin.	J. J. I. Sprenger.
J. H. Hesselberg.	H. C. Stal.
M. J. Huizinga.	Jhr. P. F. M. Stoop.
Jhr. C. L. C. van Kretschmar.	G. H. A. Thieme.
A. L. van der Laaken.	J. B. M. Trimbos.
	E. van Vloten.

Bouwkundig Ingenieur.

J. C. van den Berg.	G. de Zwart.

Werktuigkundig Ingenieur.

A. G. von Baumhauer.	G. A. B. Tieman.
E. J. Molenaar.	J. Zijderlaan.
C. W. Smit (met lof).	

Scheepsbouwkundig Ingenieur.

H. M. Andrée Wiltens.

Electrotechnisch Ingenieur.

W. M. Kop.	A. H. de Voogt.
A. K. F. Lammerts.	J. Weyland.
F. C. A. M. Oomes.	

Scheikundig Ingenieur.

Mej. P. J. Bilheimer.	H. J. Hellendoorn.
A. Bloembergen.	J. A. M. Madlener.
J. Th. W. Boxman (met lof).	J. H. van Rossem.
G. A. M. Heim.	C. W. Schonebaum.

Candidaats-examens W.I., E.I., S.I. en M.I., Januari 1916.

Toegepaste Mechanica, 1e Zitting.

Den Candidaten wordt verzocht één der beide vragen 1 en 2, benevens vraag 3 te beantwoorden.

1.

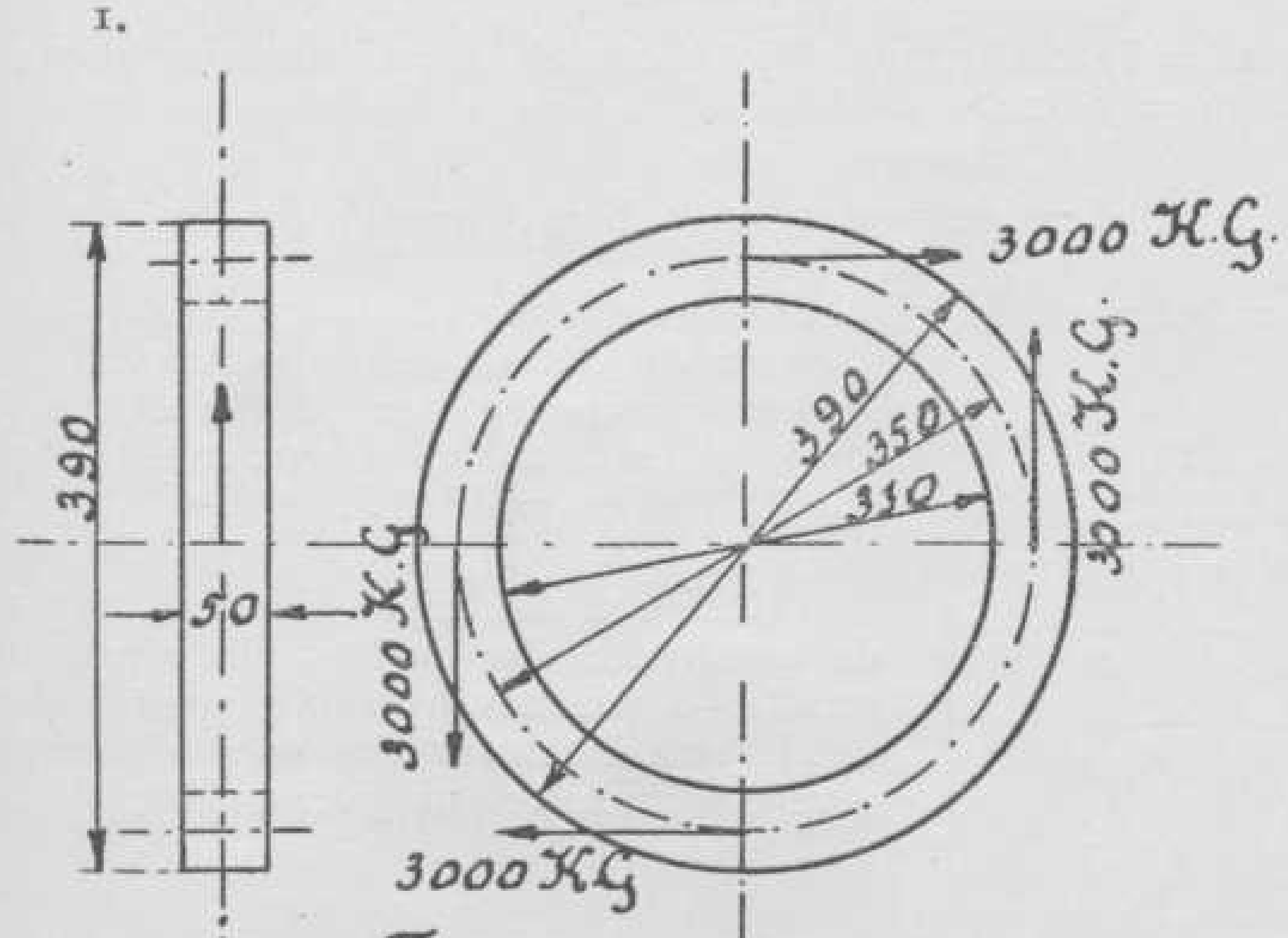


Fig. 1.

De ring van een kruisscharnierkoppeling, wordt op de in teekening aangegeven wijze belast. Men vraagt dezen ring na te rekenen.

2. Twee naast elkaar liggende zuigbuizen van een graanelevator zijn op de in figuur 2 aangegevene wijze

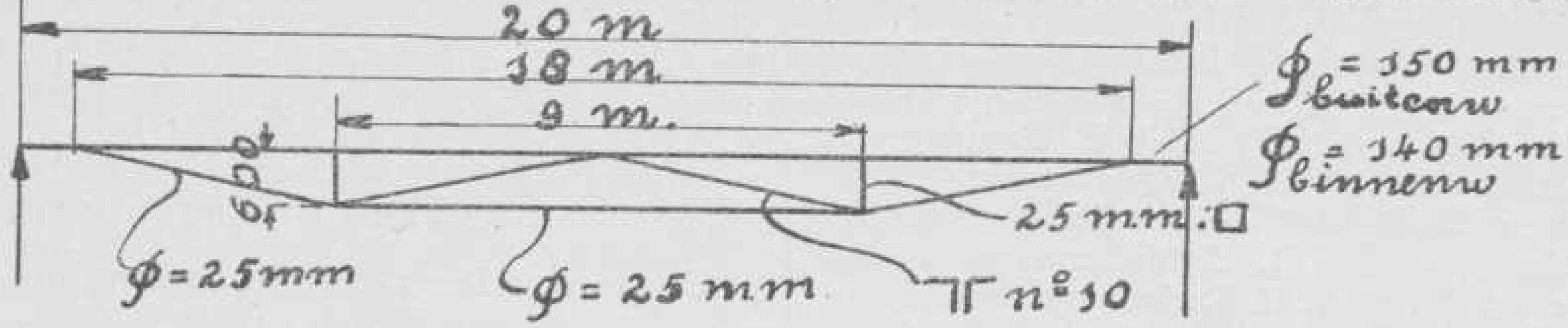


Fig. 2.

bewapend. Men vraagt deze buizen na te rekenen voor een gelijkmatige belasting van 0,25 K.G./c.m. per buis.

3. Stel een staafkrachtentabel samen voor het in figuur 3 geteekende vakwerk.

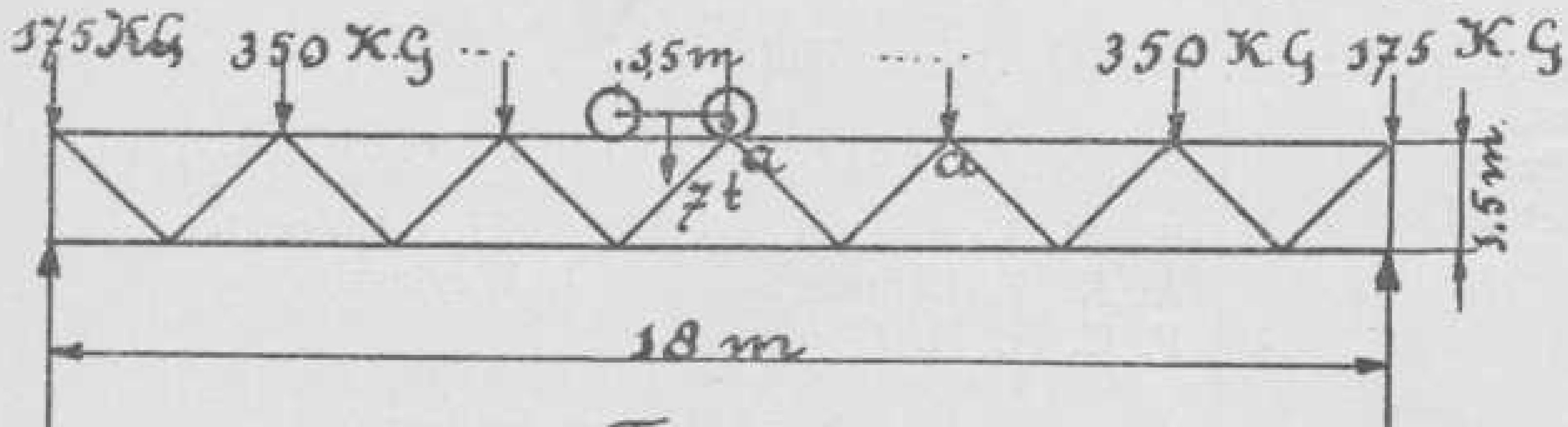


Fig. 3

Bepaal bovendien het ┓┏ profiel van staaf *a—a*.

(De staafkrachten behooren analytisch bepaald te worden).

Candidaats-examens W.I., E.I. en S.I., Januari 1916.

Toegepaste Mechanica, 2e Zitting.

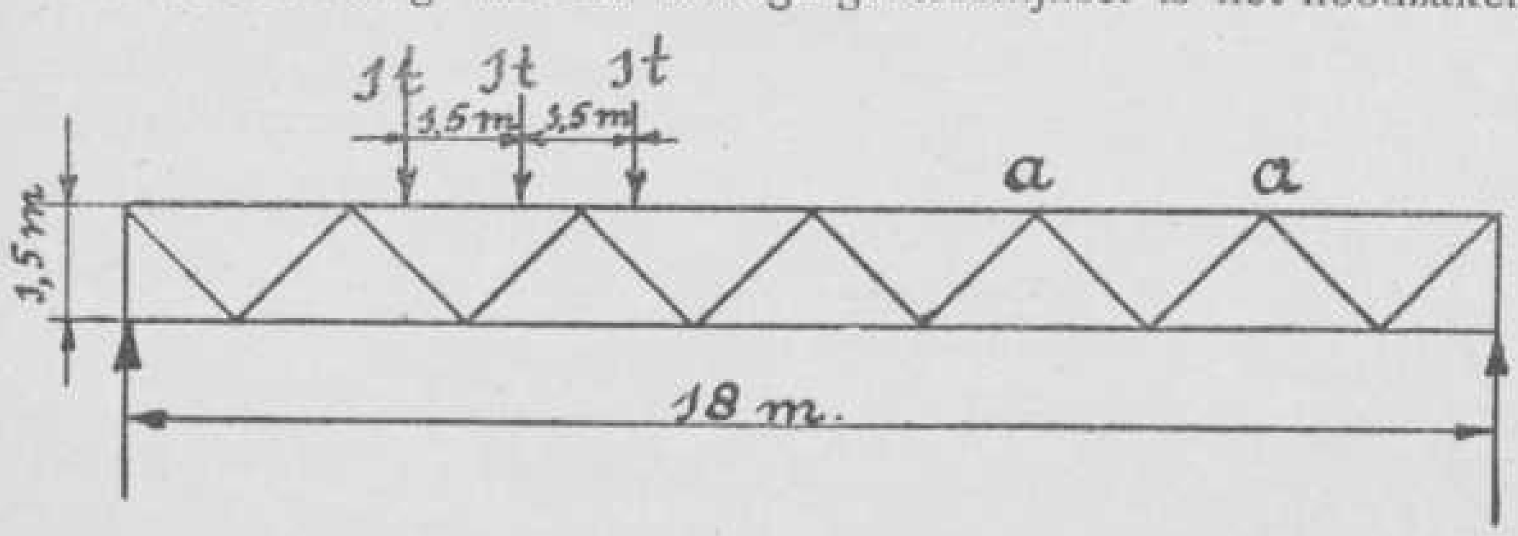
Den Candidaten wordt verzocht een der beide vragen 1 en 2, benevens vraag 3 te beantwoorden.

1. Op het vrije uiteinde van een aan één zijde ingeklemd gedachte as is een vliegwiel met buigbare spaken aangebracht. De velg van dit vliegwiel wordt geacht onvervormbaar te zijn. Ten einde de differentiaalvergelijking, welke het „torsie-trillingsverschijnsel" dezer as beheerscht, te kunnen opstellen, vraagt men naar de betrekking, welke tusschen een aan den velg aangrijpend wringend koppel W èn de door dit koppel veroorzaakte omtreksverplaatsing van de velg bestaat.

Lengte as = L cm.; polair traagheidsmoment as = I_p cm.^{4}; middellijn vliegwiel D cm.; aantal spaken *n*; lengte spaken *l* cm.; lineair traagheidsmoment spaken = J_1 cm.^{4}.

2. Een in zijn uiteinden opgelegde, in twee willekeurige punten A en B met massa's (m_1, m_2) belaste balk is in trilling.

Ter beoordeeling van het bewegingsverschijnsel is het noodzakelijk het teeken van de uitdrukking $\alpha_{11}\,\alpha_{22} - \alpha_{12}^2$, (waarin de α's de bekende Maxwell'sche invloedsgrootheden der punten A en B zijn), te kennen. Men vraagt aan te toonen, dat dit teeken positief is.



Geef een duidelijke uiteenzetting van de constructie der invloedslijn van de in staaf *a—a* (zie nevenstaande figuur) optredende staafkracht, welke door de aangegevene mobiele belasting veroorzaakt wordt.

Candidaats-examens Januari 1916.

Theoretische Mechanica.

1. Gegeven zijn twee hellende vlakken, met een horizontale vlak de hoeken α_1 en α_2 makende. Een vlak loodrecht op de snijlijn dezer vlakken snijdt deze snijlijn in B en de horizontale doorgangen der beide vlakken in A_1 en A_2. Op het hoogste punt, B, is een katrolletje (massa $= m$, straal $= a$) geplaatst, waarover een koord loopt, dat over de katrol niet slippen kan, aan welks eene uiteinde C_1 een massa m_1, en aan welks andere uiteinde C_2 een massa m_2 is bevestigd. m_1 wordt op BA_1, m_2 op BA_2 geplaatst. Men mag aannemen, dat bij de beweging de beide deelen van het koord evenwijdig aan de hellingen blijven. De wrijvingscoëfficienten op de vlakken α_1 en α_2 zijn f_1 en f_2. Ondersteld wordt, dat m_1 naar beneden kan glijden. Hoe groot is de versnelling van deze lichamen en hoe groot zijn de spanningen in beide uiteinden van het koord?

2. AB is een gelijkslachtige staaf (lengte $= 2l$, massa $= m_1$), die in een vertikaal vlak om het in het horizontale vlak liggende punt A kan draaien. Het uiteinde B steunt tegen een prismatisch blok (massa $= m_2$). Het zwaartepunt van dit blok ligt in het verticale vlak, waarin AB zich beweegt, en de doorsnede heeft den vorm van een rechthoek, welks zijde CBD verticaal is. Het blok glijdt zonder wrijving op het horizontale vlak. In den beginstand maakt AB met den horizon een hoek α.

Hoe groot is de hoeksnelheid van AB en de snelheid van het blok, als de hoek van AB met den horizont een waarde θ heeft gekregen?

Vraag 3a op te lossen door de candidaten C.I.
Candidaten W.I., S.I. en E.I. hebben de keuze tusschen vraag 3a en vraag 3b.

3*a*. Een cirkelvormige plaat (straal $= 5$ dM.) is in een vloeistof gedompeld, zoodanig dat een punt van den omtrek aan den spiegel raakt en het vlak der plaat een hoek van $45°$ met den spiegel maakt.

Hoe diep ligt het perspunt beneden den spiegel?

3*b*. De navolgende figuur op de schaal $\frac{1}{5}$ construeeren.

Een stang αA ($\alpha A = 30$ cM.) draait om het punt α. Daaraan is bij A scharnierend een stang AX verbonden, die in haar punt C de horizontale lijn αY treft ($\alpha C = 50$ cM.), aldaar door een bus gaat, die om het in de figuur met C samenvallende punt van αY kan draaien (oscilleerende beweging). In den aangenomen stand der figuur is $AC = 75$ cM. Ondersteld wordt, dat A zich eenparig beweegt met een snelheid in loodrechte richting door $A\alpha$ aangegeven. Construeer in dezen stand de versnelling van het punt C, benevens die van het punt D op de helft van AC gelegen.

Candidaats-examens Januari 1916.

Toegepaste Mechanica voor c. i. en b. i.

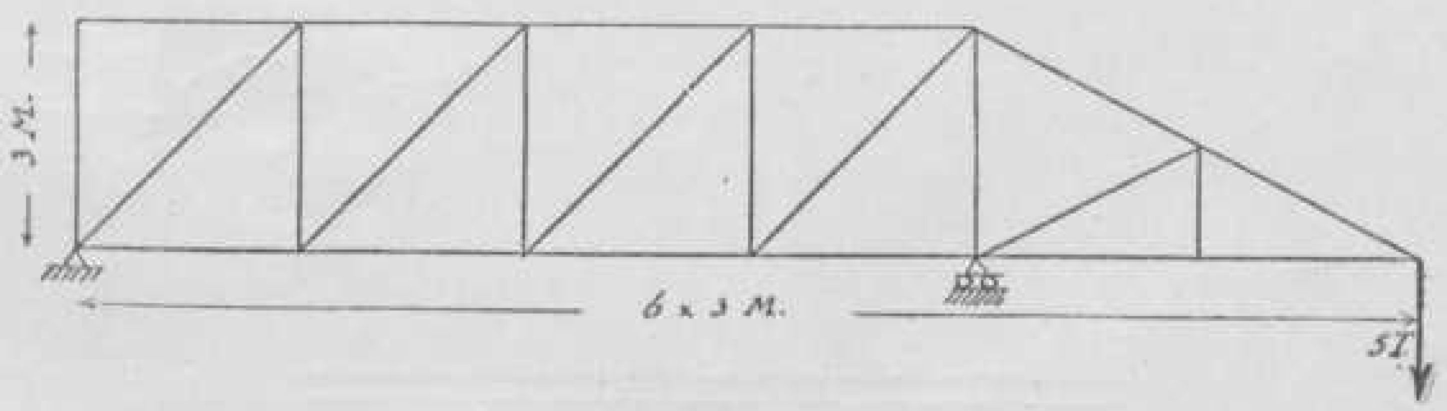
De candidaten c. i. worden uitgenoodigd, een der vragen A, B, en C te beantwoorden, alsmede minstens één der vraagstukken 1 en 2, en één der vraagstukken 3 en 4 te maken: de candidaten b. i. worden uitgenoodigd, minstens twee der vier vraagstukken te maken.

Vraag A. Wat zijn breukhypothesen; geef voorbeelden van toepassing.

Vraag B. Hoe vindt men bij een éénvoudig statisch-onbepaalde constructie de invloedslijn voor een statisch-onbepaalde grootheid.

Vraag C. Geef van een paar knikformules den vorm aan, en verklaar, hoe men aan die formules is gekomen.

Vraagstuk n⁰. 1. Bepaal de staafkrachten in onderstaanden vakwerkligger. Zal de rolopplegging zich tengevolge der belasting naar links of naar rechts bewegen?



Vraagstuk n^0. 2. Een ronde kolom bestaat uit een ijzeren mantel, dik 1 c.M., met een inwendige middellijn van 40 c.M., en een vulling van beton. Welke centrische belasting kan deze kolom dragen, als de toe te laten spanning in het ijzer 1000 K.G. per c.M^2. is, en die in het beton 90 K.G. per c.M^2?

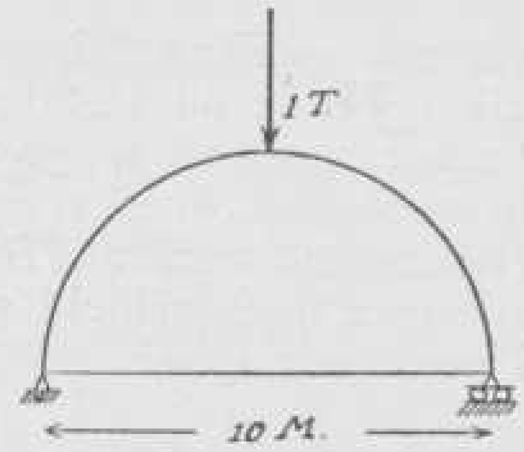
Op grond van welke overwegingen is deze laatste zoo hoog gekozen?

En welke uiterste spanningen zouden ontstaan door een drukkracht van 100 T., als de druklijn 5 c.M. uit de as lag?

$F_y = 125$ c.M^2.; $F_b = 1\,250$ c.M^2.; $I_y = 25\,000$ c.M^4.; $I_b = 125\,000$ c.M^4.

Vraagstuk n^0. 3. Een prismatische balk van 10 M. lengte is aan weerskanten ingeklemd: over de balk beweegt zich een last van 1 T. Bij welke standen van den last zijn de inklemmingskoppels een maximum? Hoe groot zijn de maxima?

Vraagstuk n^0. 4. Hoe groot is bij nevenstaanden boog de kracht in de trekstang door de belasting, als de stijfheidsfactor EI van den boog is 3 000 T. M^2., en die van de trekstang EF, is 20 000 T.?



Mechanica voor b. i.

N^0. 1. Bij een liftkooi, wegende 1 000 K.G., is bij het in beweging brengen de trekkracht in den kabel gedurende 5 seconden 1 200 K.G.; dan gedurende 5 sekonden 1 000 K.G., en daarna 900 K.G. tot de beweging is opgehouden. Wat is de alsdan afgelegde weg?

N^0. 2. Uit een reservoir stroomt door twee even hoog gelegen horizontale buizen water weg; de eene buis, met een lengte $l = 300$ M., en een wijdte $d = 20$ c.M., voert 2 M^3. per minuut af; hoeveel is dan de afvoer van de andere buis, met $l = 400$ M. en $d = 30$ c.M.? Het drukverlies Δp in elk der beide buizen wordt gegeven door de formule:

$$\Delta p = c \frac{l v^2}{d}.$$

BERICHTEN EN MEDEDEELINGEN.

De cursus in *verbandleer, enz.* zal aanvangen op Maandag 7 en Vrijdag 11 Februari 1916, des avonds van 7—9 uur, in de voormalige Indische Instelling, voor allen die op de betreffende lijst hebben geteekend.

—o—

Bij beschikking van den Minister van Staat, Minister van Binnenlandsche Zaken van 20 Januari 1916 No. 699[1] Afdeeling O. is te rekenen van 16 Januari 1916 aan A. H. Kerstjens t., te Delft op zijn verzoek eervol ontslag verleend als assistent voor de organische scheikunde aan de Technische Hoogeschool, terwijl voor het tijdvak van 1 Februari tot en met 31 Augustus 1916 als opvolger is benoemd S. de Waard, van Leeuwenhoeksingel 12, Delft.

Bij beschikking van den Minister van Staat, Minister van Binnenlandsche Zaken van 27 Januari 1916 No. 963[1] Afdeeling O. is te rekenen van 1 Januari 1916, aan Dr. P. E. Verkade t., te Delft op zijn verzoek eervol ontslag verleend als assistent voor de organische scheikunde aan de Technische Hoogeschool te Delft en voor het tijdvak van 1 Februari tot en met 31 Augustus 1916 als zoodanig benoemd J. van Giffen, Oude Delft 92 aldaar.

—o—

Bij beschikking van den Minister van Staat, Minister van Binnenlandsche Zaken van 28 Januari 1916 No. 1026 afdeeling O. is met ingang van 1 Februari 1916 benoemd tot amanuensis aan het organisch scheikundig laboratorium der Technische Hoogeschool te Delft, D. van Dreumel, thans bediende aldaar.